

ГЛАВА 2. ГИДРОДИНАМИКА

Основной задачей гидродинамики является исследование изменения параметров в движущейся жидкости:

- скорость движения частиц жидкости

$$v = f_1(x, y, z, t);$$

- давление в рассматриваемой точке

$$p = f_2(x, y, z, t);$$

- силы воздействия жидкости на погруженные в нее тела.

При изучении движения жидкости гидродинамика использует метод Л. Эйлера, согласно которому движение отдельных частиц жидкости и потока в целом рассматривается относительно неподвижных точек пространства, занятого движущейся жидкостью.

При теоретических исследованиях гидродинамика использует свойства идеальной жидкости. Решения, полученные для идеальной жидкости, распространяются на реальную жидкость, а в аналитические зависимости вносят поправочные коэффициенты, полученные экспериментальным путем и которые учитывают влияние на движение свойств реальных жидкостей. В конечном итоге исследование движения сводится к определению во всех интересующих точках потока жидкости двух основных параметров – скорости движения и гидродинамического давления. При этом под потоком жидкости понимается часть неразрывно движущейся жидкости, ограниченной деформируемыми или недеформируемыми стенками, образующими русло.

Различают **установившееся и неустановившееся** движения жидкости.

Установившееся движение – это такое движение, когда скорость и давление в любой точке движущейся жидкости не изменяются во времени, а зависят только от местонахождения точки в пространстве:

$$v = f_1(x, y, z); \quad p = f_2(x, y, z).$$

Примерами установившегося движения жидкости являются истечение жидкости через отверстие в резервуарах при постоянном уровне (напоре истечения); течение в нефтепроводах при неизменном характере работы потребителей; движение жидкости в нагнетательной и всасывающей линиях центробежного насоса при постоянном числе оборотов привода и неизменных сопротивлениях в линиях.

Неустановившееся движение – это такое движение, когда скорость и давление в каждой точке изменяются с течением времени, т. е. являются функциями координат и времени

$$v = f_1(x, y, z, t); \quad p = f_2(x, y, z, t).$$

В этом случае скорость и давление зависят не только от их местонахождения в пространстве, но и от времени.

Примерами неустановившегося движения жидкости являются опорожнение и заполнение резервуаров, трубопроводов, течение в трубопроводах при остановке, при запуске насосов, при открытии или закрытии запорной арматуры и др.

В дальнейшем будем рассматривать только установившееся движение жидкости.

2.1. Основные гидродинамические понятия

Поток жидкости – это непрерывная масса частиц жидкости, движущаяся в определенном направлении.

Различают поток **руслевой**, если он ограничен полностью или частично стенками русла, и **свободный**. Примерами руслового потока может служить движение жидкости в трубопроводах, реках и каналах. Примером свободного потока – движение струи жидкости, вышедшей из гидромонитора.

К гидравлическим элементам потока относятся живое сечение, расход, смоченный периметр, гидравлический радиус и средняя скорость.

Живое сечение потока – поверхность, перпендикулярная направлению скорости потока и ограниченная его внешним контуром. Обозначается буквой S и измеряется в м^2 .

Расход потока – объем жидкости, проходящий в единицу времени через живое сечение потока. Обозначается буквой Q и измеряется в $\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$.

Смоченный периметр потока – длина контура живого сечения, на котором жидкость соприкасается с твердыми стенками. Обозначается буквой χ и измеряется в м.

Гидравлический радиус потока – отношение площади живого сечения S к смоченному периметру χ . Обозначается буквой R и измеряется в м

$$R = \frac{S}{\chi}$$

Величина R не имеет особого физического смысла; при помощи этой величины пытаются приблизительно учесть влияние формы (а так же размеров) живого сечения потока на движение жидкости.

Средняя скорость потока – частное от деления расхода потока Q на площадь его живого сечения S . Обозначается буквой v и измеряется в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

$$v = \frac{Q}{S}$$

Исходя из определений гидравлических элементов потока, установившееся движение может быть **равномерным и неравномерным**.

Равномерное движение жидкости – установившееся движение, при котором живые сечения и средняя скорость потока не изменяются по его длине.

Пример: движение жидкости в цилиндрической трубе.

Неравномерное движение жидкости – установившееся движение, при котором живые сечения и средняя скорость потока изменяются по его длине. *Пример:* движение жидкости в канале при изменении глубины потока.

Напорное движение – случай, когда поток жидкости со всех сторон ограничен твердыми стенками русла, а давление в любой точке отлично от атмосферного. Движение жидкости происходит за счет разности напоров (водопроводная сеть, гидрولинии в объемном гидроприводе).

Безнапорное движение – случай движения жидкости со свободной поверхностью. Движение происходит благодаря разности геодезических отметок русла (*пример:* движение воды в каналах и реках).

Гидравлические струи, в этом случае поток жидкости не ограничивается стенками русла.

Для схематизации явления движения жидкости вводят понятие о линии тока. Пусть в любой точке потока движущейся жидкости скорость движения меняется по величине и направлению (рис. 31).

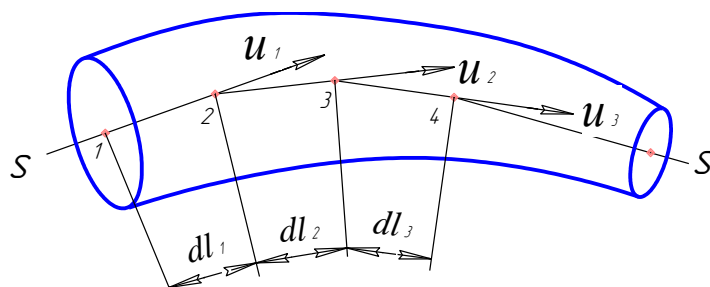


Рис. 31. Линия тока

Построим в точке 1 вектор, показывающий величину и направление скорости движения u_1 в этой точке в данный момент времени t . Выберем на этом векторе точку 2 на расстоянии dl_1 от точки 1 и построим вектор соответствующей скорости u_2 в этой точке в тот же момент времени t . Затем выберем точку 3 и т. д.

В пределе ломаная линия 1 – 2 – 3... станет кривой, проходящей через данную точку 1. Эта кривая называется **линией тока**. Следовательно, **линией тока** называется кривая, проведенная в движущейся жидкости линия, касательные к которой в каждой точке совпадают с направлением векторов скорости в точке в данный момент времени.

Элементарные струйки. Возьмем в движущейся жидкости элементарную площадку и из всех точек ее периметра проведем линии тока (рис. 32). Совокупность этих линий образует поверхность, которая ограничивает пространство, называемое **трубкой тока**.

Трубкой тока называется поверхность, образованная системой линий тока, проведенных через все точки контура элементарной площадки. С точки зрения положений геометрии, трубку тока можно рассматривать как элементарный канал, через который протекает жидкость.

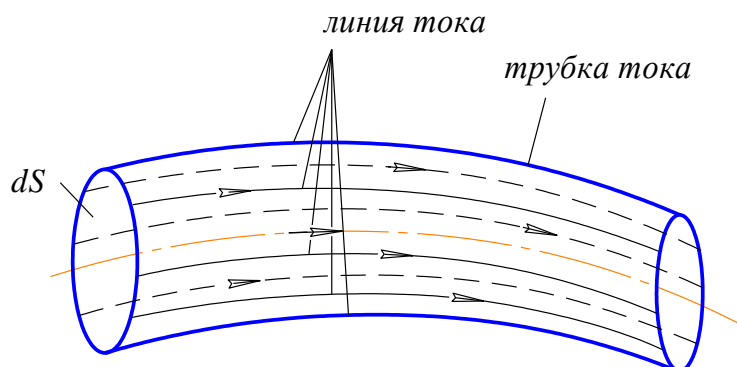


Рис. 32. Элементарная струйка

Жидкость, движущаяся в трубке тока представляет собой элементарную струйку. Следовательно, **элементарная струйка** – часть потока жидкости, ограниченная линиями тока, проведенными через все точки замкнутого контура, находящегося в движущейся жидкости.

Любой поток жидкости можно рассматривать как совокупность большого количества элементарных струек. Для случая установившегося движения элементарной струйке придают следующие свойства:

- а) форма элементарной струйки остается неизменной с течением времени;
- б) боковая поверхность элементарной струйки – трубка тока непроницаема для частиц жидкости движущихся как вне, так и внутри ее (обмена энергией жидкости между элементарными струйками нет);
- в) вследствие малости поперечного сечения элементарной струйки скорость и гидродинамическое давление во всех точках ее поперечного сечения одинаковы.

2.2. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

Формально общие уравнения движения идеальной жидкости можно получить из уравнений, составленных для покоящейся жидкости, если воспользоваться принципом Даламбера, согласно которому к уже действующим силам добавляются силы инерции.

Обозначим силу инерции, отнесенную к единице массы движущейся идеальной жидкости, $\frac{du}{dt}$. Тогда проекции этой силы на координатные оси будут

равны: $\frac{du_x}{dt}$; $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$. Знак минус в данном случае указывает на то, что единичная сила инерции имеет направление противоположное ускорению. С учетом сказанного дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости получают вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{\partial p}{\rho \partial x} &= \frac{du_x}{dt}; \\ Y - \frac{\partial p}{\rho \partial y} &= \frac{du_y}{dt}; \\ Z - \frac{\partial p}{\rho \partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Для случая неустановившегося движения, когда $u = f(x, y, z, t)$ полный дифференциал скорости, например du_x , равен,

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz,$$

тогда

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z.$$

С учетом аналогичных выражений, полученных для $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$, дифференциальные уравнения неустановившегося движения идеальной жидкости получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{\partial p}{\rho \partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\ Y - \frac{\partial p}{\rho \partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\ Z - \frac{\partial p}{\rho \partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Для установившегося движения идеальной жидкости, когда $u = f(x, y, z)$, дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{\partial p}{\rho \partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z; \\ Y - \frac{\partial p}{\rho \partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z; \\ Z - \frac{\partial p}{\rho \partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Системы дифференциальных уравнений (57) и (58) называются системами дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости, представленными в развернутом виде.

Уравнения (56) – (58) применимы как для случаев движения капельных жидкостей (когда $\rho = const$), так и для движения газов (когда $\rho = var$).

2.3. Дифференциальные уравнения неразрывности движущейся жидкости

В системе из трех дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости (56) содержится четыре неизвестных параметра движения $p; u_x; u_y; u_z$. Для того, чтобы определить эти параметры, необходимо четвертое уравнение. Таким уравнением является дифференциальное уравнение неразрывности.

Выделим в движущейся идеальной жидкости параллелепипед (рис. 33) со сторонами $dx; dy; dz$, представляющий собой неподвижную часть пространства, заполненного движущейся жидкостью. Будем считать, что движение жидкости происходит без образования пустот и переуплотнений, т. е. с постоянной плотностью.

В точке $A(x; y; z)$ в момент времени t скорость движения будет u , а ее проекции на координатные оси - $u_x; u_y; u_z$.

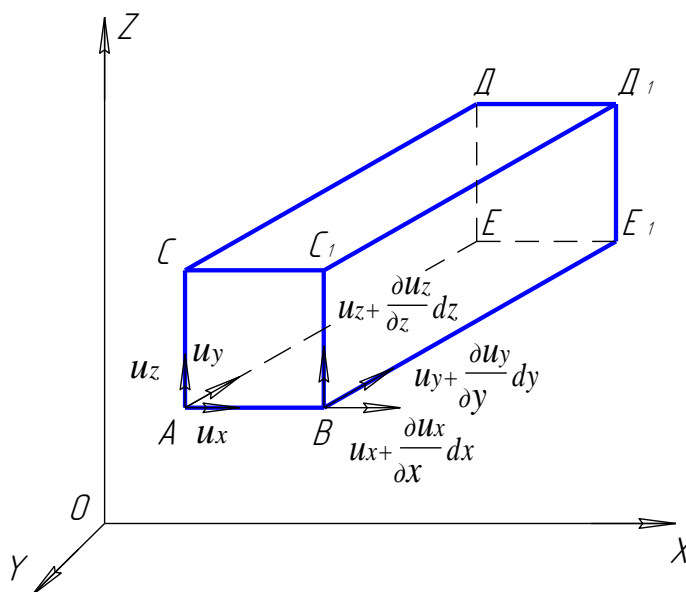


Рис. 33. К выводу уравнения неразрывности движущейся жидкости

Так как скорости движения частиц изменяются с изменением их положения в пространстве, то в тот же момент времени t скорость в точке $B(x + dx; y + dy; z + dz)$, отстоящей от точки A на расстоянии dx , будет равна

$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$. Частная производная в градиенте давления $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ принята потому,

что при переходе частицы из точки A в точку B меняется только координата dx .

Таким образом, за время dt через грань $ACDE$ параллелепипеда будет вытекать жидкость массой

$$\rho \cdot dy \cdot dz \cdot u_x \cdot dt,$$

а через грань $BC_1D_1E_1$ вытекать

$$\rho \cdot dy \cdot dz \cdot \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right).$$

Следовательно, за время $d\tau$ изменение массы жидкости в параллелепипеде в результате движения через грани, нормальные к оси X , будет равно

$$\rho \cdot dy \cdot dz \cdot \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) \cdot dt - \rho \cdot dy \cdot dz \cdot u_x \cdot dt = \rho \cdot dy \cdot dz \cdot dx \frac{\partial u_x}{\partial x} dt.$$

Изменения массы жидкости через грани нормальные к осям Y и Z соответственно будут равны

$$\rho \cdot dx \cdot dz \cdot dy \frac{\partial u_y}{\partial y} dt;$$

$$\rho \cdot dx \cdot dz \cdot dy \frac{\partial u_z}{\partial z} dt.$$

Так как форма параллелепипеда остается неизменной, а движение жидкости происходит без образования пустот и переуплотнений, общая сумма изменений массы внутри параллелепипеда будет равна нулю, т. е.

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot dt + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} dt + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} dt = 0$$

или после сокращения:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (59)$$

Физический смысл уравнения (59) состоит в том, что сумма изменений проекций скоростей в направлении соответствующих координатных осей равна нулю. Это значит, что объем несжимаемой жидкости, которая вытекает в параллелепипед, равен объему жидкости, вытекающему из него.

2.4. Уравнение неразрывности

Из уравнения постоянства расхода

$$Q_1 = Q_2 = Q = const \text{ (для потока)} \quad (60)$$

получается другое важное уравнение движения жидкости.

Так как расход записывается в виде

$$Q = v \cdot S,$$

то уравнение постоянства расхода можно записать в следующем виде:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = v S = Q = \text{const} \text{ (для потока)}, \quad (61)$$

которое и называется **уравнением неразрывности потока жидкости** (рис. 34), а для элементарной струйки

$$u_1 dS_1 = u_2 dS_2 = u dS = dQ = \text{const}.$$

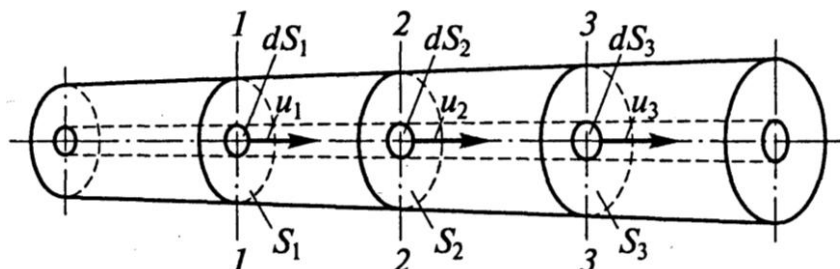


Рис. 34. Схема к уравнению неразрывности потока

Из уравнения неразрывности потока следует, что при установившемся движении несжимаемой жидкости произведение средней скорости на площадь живого сечения потока является величиной постоянной.

Из уравнения (61) можно также получить

$$\frac{v_1}{S_1} = \frac{v_2}{S_2}, \quad (62)$$

т. е. в установившемся потоке жидкости средние скорости движения обратно пропорциональны площадям соответствующих живых сечений.

2.5. Уравнение установившегося движения элементарной струйки идеальной жидкости (уравнение Д. Бернулли)

В 1738 году почетный член Петербургской академии наук Даниил Бернулли опубликовал свою монографию «Гидродинамика, или Записки о силах и движениях воды». В этой монографии, применив к движущейся в элементарной струйке идеальной жидкости теорему теоретической механики об изменении кинетической энергии (теорему «живых сил»), Д. Бернулли получил уравнение движения, известное ныне как уравнение Бернулли.

Это же уравнение можно получить, решая систему дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости – уравнений Л. Эйлера. В данном случае мы воспользуемся этим способом. Для этого элементарную струйку идеальной жидкости расположим относительно координатных осей X ; Y ; Z (рис. 35).

Умножим все члены, входящие в систему дифференциальных уравнений Л. Эйлера (56), соответственно на dx ; dy ; dz , после чего сложим все уравнения.

В итоге получим:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz. \quad (63)$$

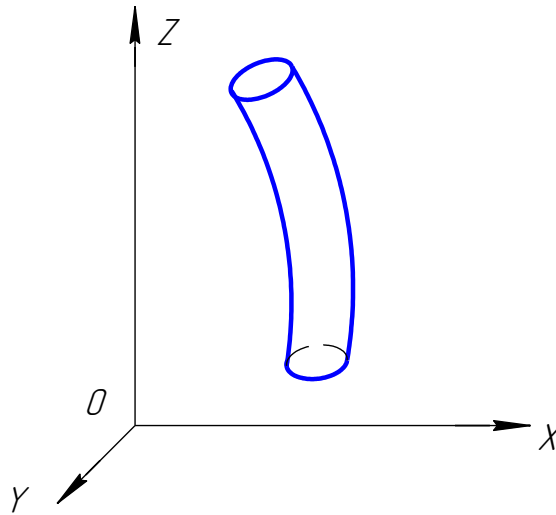


Рис. 35. Элементарная струйка

Для случая установившегося движения, когда $p = f(x, y, z)$,

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = dp.$$

Учитывая, что

$$\frac{dx}{dt} = u_x; \quad \frac{dy}{dt} = u_y; \quad \frac{dz}{dt} = u_z;$$

$$u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = d\left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{u^2}{2}\right),$$

уравнение (63) получает следующий вид:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} dp = d\left(\frac{u^2}{2}\right). \quad (63, a)$$

Рассмотрим случай, когда массовой силой, действующей на жидкость, является только сила веса. В этом случае (рис. 35) $X = 0$; $Y = 0$; $Z = -g$, а уравнение (63, а) получает вид:

$$-g \cdot dz - \frac{1}{\rho} dp = d\left(\frac{u^2}{2}\right).$$

Проинтегрировав это уравнение и разделив его левую и правую часть на g , получим

$$Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = const. \quad (64)$$

Так как сумма $\left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right)$ постоянна для всех частиц идеальной жидкости, то для двух произвольно взятых живых сечений элементарной струйки движущейся жидкости можно записать:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}. \quad (65)$$

Уравнение (65) называется *уравнением движения Д. Бернулли*; оно устанавливает связь между давлением, скоростью движения и геометрическим положением частиц идеальной жидкости элементарной струйки. В уравнении (65):

- Z – высота расположения рассматриваемой точки над произвольно выбранной горизонтальной плоскостью – плоскостью сравнения;
- $\frac{p}{\rho g}$ – приведенная высота гидродинамического давления; так же, как в гидростатике, эту высоту называют пьезометрической;
- $\frac{u^2}{2g}$ – скоростной напор.

В гидродинамике сумму $Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = H$ называют *полным гидродинамическим напором* сечения элементарной струйки.

Из уравнения (65) следует, что для установившегося движения идеальной жидкости полный гидродинамический напор остается постоянным во всех сечениях элементарной струйки.

2.6. Механическая энергия потока жидкости

Жидкость, находящаяся в покое или движении, обладает определенным запасом механической энергии E , т.е. способностью производить работу.

Механическую энергию, как известно, можно представить в виде

$$E = E_{пот} + E_{кин},$$

где E – полная энергия потока жидкости, Н·м;

$E_{пот}$ – потенциальная энергия, Н·м;

$E_{кин}$ – кинетическая энергия, Н·м.

Если покоящаяся жидкость обладает только потенциальной энергией, то движущаяся – потенциальной и кинетической энергиями.

Различают следующие виды потенциальной энергии: потенциальная энергия положения $E_{пол}$ и потенциальная энергия давления $E_{давл}$. Отсюда механическую энергию потока жидкости в общем случае можно представить как

$$E = E_{пол} + E_{давл} + E_{кин}. \quad (66)$$

Потенциальная энергия положения $E_{пол}$ выражает возможность совершения жидкостью работы при ее снижении до условного уровня $0 - 0$ (плоскости

отсчета). Величина $E_{пол}$ определяется произведением веса жидкости G на расстояние Z от центра тяжести рассматриваемого сечения до плоскости отчета.

Потенциальная энергия давления $E_{давл}$ выражает возможность совершения работы за счет гидростатического давления, возникающего в жидкости из-за ее весомости, или другими словами, это та работа, которую может совершить жидкость весом G , поднимаясь на пьезометрическую высоту $\frac{p}{\rho g}$ под воздействием гидродинамического давления p . Величина $E_{давл}$ определяется произведением веса жидкости G на пьезометрическую высоту $\frac{p}{\rho g}$.

Кинетическая энергия жидкости $E_{кин}$ определяется произведением веса жидкости G на высоту (скоростную) $\frac{v^2}{2g}$, с которой должно свободно упасть тело, чтобы приобрести скорость v (рис. 36). Величина $\frac{v^2}{2g}$ называется также скоростным напором.

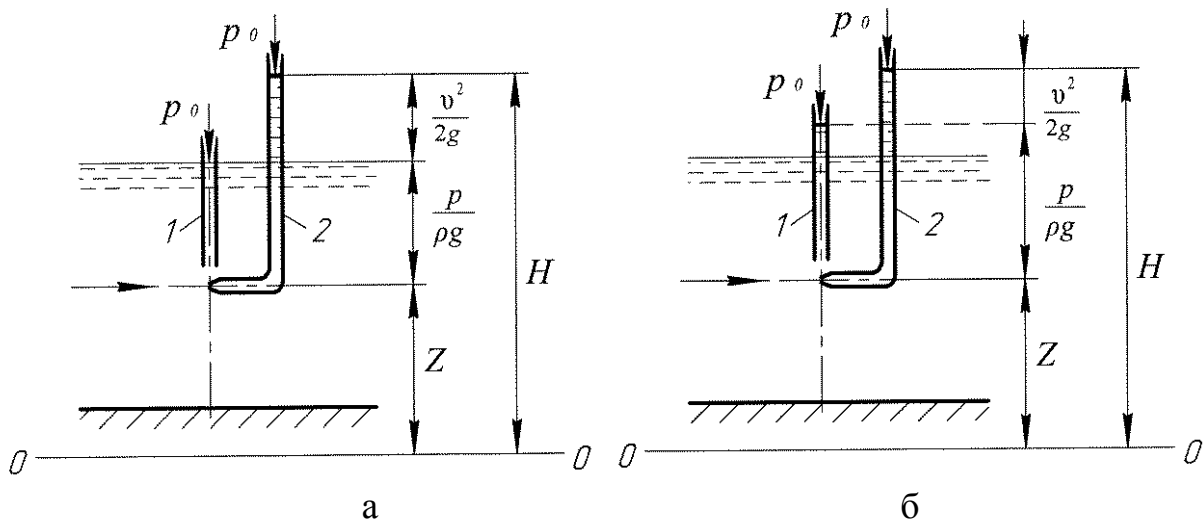


Рис. 36. Схема к понятию полного напора жидкости в сечении 1 – 1:
 а – безнапорный поток; б – напорный поток;
 1 – пьезометр; 2 - трубка Пито; 0 – 0 – плоскость сравнения (отсчета);
 p_0 – давление на свободную поверхность жидкости.

Величину $\frac{v^2}{2g}$ можно измерить в натуре, если опустить в движущуюся жидкость (рис. 36) скоростную трубку, изогнутую в направлении, противоположном движению.

Отсюда полная механическая энергия потока жидкости выражается в виде

$$E = GZ + G \cdot \frac{p}{\rho g} + G \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (67)$$

В гидравлике принято относить механическую энергию потока жидкости к единице веса объема и называть ее удельной энергией жидкости, обозначая буквой (e):

$$e = \frac{E}{G},$$

где e – удельная энергия жидкости, м ;
 E – полная энергия потока жидкости, Н·м
 G – вес единицы объема жидкости, Н.

Поскольку единицей измерения механической энергии жидкости является *ньютон·метр*, а веса – *ньютон*, то единицей измерения удельной энергии жидкости является метр

$$e = \frac{H \cdot \text{м}}{H} = \text{м}.$$

Отсюда

$$e = e_{\text{пол}} + e_{\text{дав}} + e_{\text{кин}}, \quad (68)$$

где e – полная удельная энергия потока жидкости, м ;
 $e_{\text{пол}}$ – удельная энергия положения, м ;
 $e_{\text{дав}}$ – удельная энергия давления, м ;
 $e_{\text{кин}}$ – удельная кинетическая энергия, м .

Полная удельная энергия потока жидкости выразится в виде

$$e = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}. \quad (69)$$

В технической литературе по гидравлике и гидравлическим машинам вместо выражения «удельная энергия» часто употребляют выражение «напор» и обозначают буквой H :

$$e = H,$$

где e – удельная энергия жидкости, м ;
 H – напор гидродинамический, м .

Кроме того, вместо термина «удельная потенциальная энергия» - «пьезометрический напор» или «гидродинамический напор»; вместо выражения «удельная кинетическая энергия» – «скоростной напор». Отсюда, напор H представляет собой механическую энергию потока жидкости, протекающей через живое сечение потока в единицу времени, отнесенную к единице веса объема жидкости. Иначе, **напор** – это мера механической энергии, принадлежащей единице веса жидкости.

2.7. Уравнение Д. Бернулли для потока реальной жидкости.

Энергетический баланс потока жидкости определяется уравнением Даниила Бернулли, впервые выведенным им в 1738 г. для элементарной струйки идеальной жидкости (т. е. не имеющей вязкости) при установившемся движении.

В последующем на основании работ как Д. Бернулли, так и других ученых (Л. Эйлера, Г. Кориолиса, Ж. Буссинеска и др.), это уравнение было сформировано для целого потока реальной жидкости, однако в истории науки оно известно как уравнение Даниила Бернулли. Для составления энергетического баланса рассмотрим поток, проходящий по трубопроводу переменного сечения от живого сечения $I - I$ к живому сечению $II - II$ (рис. 37).

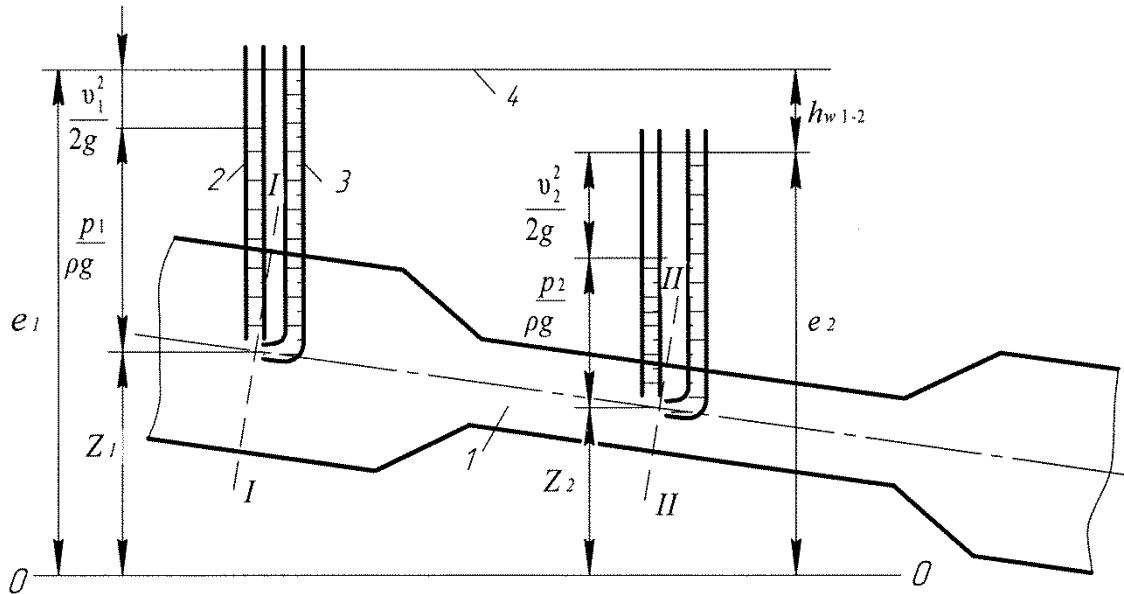


Рис. 37. Графическое изображение уравнения Д. Бернулли для потока реальной жидкости при установившемся движении:

1 – поток; 2 – пьезометр; 3 – трубка Пито; 4 – линия полной энергии;
0 – 0 – плоскость сравнения.

Рассмотрим полную удельную энергию в сечениях относительно плоскости сравнения $0 - 0$ с учетом ранее полученного уравнения (69).

Полная удельная энергия потока в сечении $I - I$:

$$e_1 = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}. \quad (70)$$

Полная удельная энергия потока в сечении $II - II$:

$$e_2 = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (71)$$

Показания пьезометров и скоростных трубок, установленных в сечениях $I - I$ и $II - II$, демонстрируют, что $e_1 > e_2$.

Это вызвано тем, что часть энергии потока расходуется на преодоление гидравлических сопротивлений при движении жидкости от одного сечения к другому.

Величина $e_1 - e_2$ называется удельной потерей энергии (или потерей напора) и обозначается h_{w1-2} . Отсюда на основании закона сохранения энергии запишем следующее уравнение

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{w1-2}. \quad (72)$$

Полученное выражение и называется **уравнением Бернулли** для потока реальной жидкости.

Влияние вязкости жидкости приводит к неравномерному распределению скоростей в поперечном сечении потока (трубопровода). Поэтому уравнение (72) переписывается в следующем виде:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}, \quad (73)$$

где α – коэффициент, характеризующий неравномерность распределения скоростей (коэффициент Кориолиса).

При равномерном движении воды в трубах и каналах небольшого поперечного сечения коэффициент Кориолиса принимается равным 1,05...1,1. В большинстве случаев при практических расчетах полагают $\alpha_1 = \alpha_2 = 1,0$.

Каждая составляющая уравнения Бернулли имеет геометрический и энергетический смысл.

Все члены уравнения (73) имеют линейную размерность, и каждый из них может называться высотой:

Z – геометрическая высота, или высота положения,

$\frac{p}{\rho g}$ – пьезометрическая высота;

$\frac{v^2}{2g}$ – высота скоростного напора;

h_{w1-2} – высота потерь напора.

Сформулируем геометрический смысл уравнения Бернулли для потока реальной жидкости.

При установившемся потоке реальной жидкости сумма четырех высот (высоты положения, пьезометрической высоты, высоты скоростного напора и высоты потерь напора) есть величина постоянная для любого сечения потока.

Энергетический смысл уравнения Бернулли заключается в следующем: при установившемся потоке реальной жидкости сумма четырех удельных энергий (энергии положения, энергии давления, кинетической энергии и энергии потерь) остается неизменной для любого сечения потока.

Уравнение Бернулли является основным уравнение гидродинамики, с помощью которого выводятся расчетные формулы для различных случаев движения жидкости и решается большое количество практических задач равномерного движения жидкости в трубах и открытых руслах.

Для решения этих задач используют два основных уравнения гидродинамики:

1) уравнение Бернулли

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2};$$

2) уравнение неразрывности потока

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = Q = const . \quad (74)$$

При решении задач обычно по длине потока выбирают два характерных поперечных сечения ($I - I$ и $II - II$). Горизонтальная плоскость сравнения $0 - 0$, как правило, выбирается по оси трубопровода. При этом сечения выбираются с таким расчетом, чтобы для одного из них были известны величины Z , p и v , а для другого – одна или две из них были неизвестны и подлежали определению. Взаимосвязь между тремя параметрами: скоростью, давлением и живым сечением послужила основой для конструирования различных гидравлических и пневматических машин, устройств и приспособлений, получивших широкое применение в технике.

2.8. Примеры практического применения уравнения Д. Бернулли

2.8.1. Трубы Вентури

Уравнение Д. Бернулли является основным законом установившегося движения жидкости. Оно позволяет рассмотреть и понять работу ряда устройств, действие которых основано на использовании этого важнейшего закона. Рассмотрим некоторые из устройств: трубы Вентури, гидродинамические трубки, насосы и карбюраторы.

Трубы Вентури предназначены для измерения расхода жидкости в напорных трубопроводах (рис. 38).

Труба Вентури состоит из входного цилиндрического патрубка 1, входного конуса (конфузора) 5, цилиндрической горловины 6 и длинного диффузора 7.

Для отбора давления к кольцевым камерам 2 и 8 присоединяются пьезометры 3 и 4. В свою очередь кольцевые камеры сообщаются с потоком жидкости через ряд отверстий 9, выполненных по окружности.

В качестве сужающих устройств для измерения расхода в напорных трубопроводах кроме труб Вентури используются диафрагмы и сопла.

При выборе типа сужающего устройства надо иметь в виду, что наибольшее гидравлическое сопротивление имеет диафрагма, а наименьшее – труба Вентури. Перепад давления в сужающих устройствах в производственных условиях измеряется обычно дифференциальными ртутными манометрами, а в лабораторных – пьезометрами.

Метод измерения расхода основан на том, что поток жидкости, протекающей в трубопроводе, неразрывен и, если в одном месте трубы с помощью како-

го-либо сужающего устройства уменьшить поперечное сечение, то скорость потока на этом участке должна соответственно увеличиться.

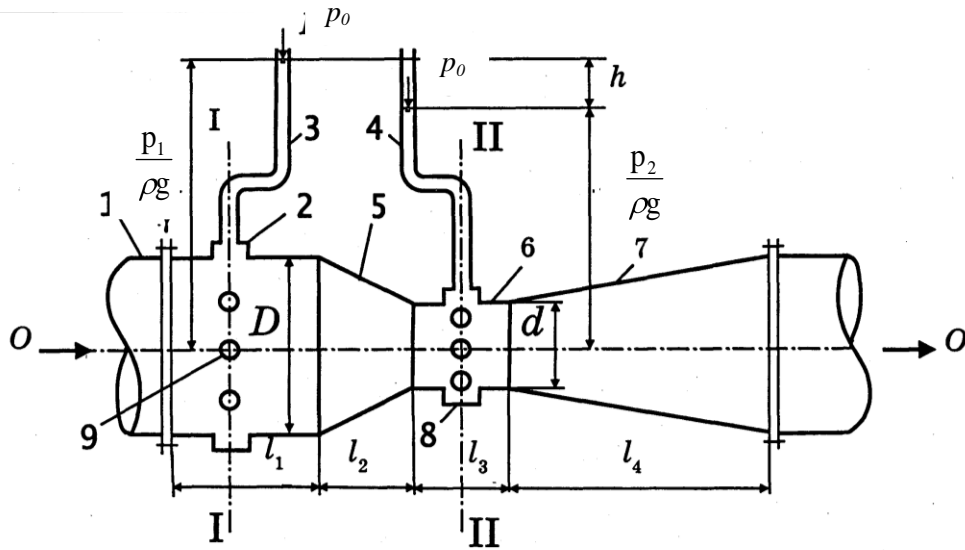


Рис. 38. Схема трубы Вентури:

- 1 – входной патрубок; 2, 8 – кольцевые камеры; 3 – пьезометр №1;
 4 – пьезометр №2; 5 – входной конус (конфузор); 6 – горловина;
 7 – диффузор; 9 – отверстие для отбора давления;
 $l_1 \dots l_4$ – длина участка; D и d – диаметры

Полная энергия жидкости, представляющая собой сумму потенциальной энергии (выраженной величиной давления), и кинетической энергии (выраженной величиной скорости), является, согласно закону сохранения энергии, постоянной, если пренебречь потерями. Тогда при протекании жидкости происходит частичный переход потенциальной энергии в кинетическую. В связи с этим статическое давление в суженном сечении будет меньше давления перед местом сужения.

Разность давлений перед суженным участком трубопровода и в месте его сужения называется *перепадом давления*. Перепад давления тем больше, чем больше скорость жидкости. Следовательно, перепад давления может служить мерой расхода жидкости. Зависимость между расходом Q и перепадом давления h можно установить, пользуясь уравнением Бернулли. Для этого выберем на рис. 38 два сечения: сечение $I-I$ перед входом в сужающее устройство в том месте, где еще нет его влияния на характер потока (т. е. во входном патрубке 1); сечение $II-II$ – в месте наибольшего сжатия потока (т. е. в горловине 6). Примем, что плоскость сравнения $O-O$ проходит через ось трубы (следовательно, $Z_1 = Z_2 = 0$). Пренебрегая величиной потерь напора, $h_{w1-2} = 0$, и неравномерностью распределения скоростей в потоке $\alpha = 1$, для горизонтально установленного водомера уравнение Бернулли (73) запишем в следующем виде:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}. \quad (75)$$

Из полученного уравнения (75) следует, что с увеличением скорости движения давление уменьшается и, наоборот, с уменьшением скорости давление увеличивается. Это положение и используется в водомере Вентури, где по разности показаний пьезометров h , зная диаметры D и d , можно определить расход Q . Выражение (75) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = h, \quad (76)$$

где h – разность уровней жидкости в пьезометрических трубках, присоединенных к сечениям $I - I$ и $II - II$, м.

Из уравнения неразрывности потока следует, что

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 = Q, \quad (77)$$

Отсюда $v_1 = \frac{Q}{S_1}$, $v_2 = \frac{Q}{S_2}$. Подставив значения v_1 и v_2 в выражение (76), получим

$$\frac{\frac{Q^2}{S_2^2} - \frac{Q^2}{S_1^2}}{2g} = h.$$

Тогда

$$Q = \sqrt{2g \cdot \frac{S_1^2 \cdot S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot \sqrt{h}$$

или

$$Q = k \cdot \sqrt{h}, \quad (78)$$

где k – постоянная водомера заданной конструкции и размеров.

Следовательно, зная разность показаний пьезометров, можно определить расход напорного потока жидкости.

Если учесть потери энергии, которыми мы пренебрегали в начальный период, то в полученную формулу (78) следует ввести коэффициент расхода μ , учитывающий эти потери; $\mu = 0,980 \dots 0,985$.

Окончательно формулу (78) перепишем в виде

$$Q = \mu \cdot k \cdot \sqrt{h}. \quad (79)$$

2.8.2. Гидродинамическая трубка Пито

Гидродинамическая трубка Пито предназначена для определения местных скоростей (осредненных во времени) в точках живого сечения безнапорного потока жидкости (рис. 39). Трубка Пито, впервые примененная в 1732 г. французским инженером-гидротехником А. Пито, представляет собой изогнутую под прямым углом трубку, устанавливаемую открытым концом отогнутой час-

ти навстречу потоку так, чтобы центр отверстия трубки совпал с точкой потока, в которой определяется скорость движения жидкости. Второй, верхний, конец трубки выводится из потока наружу.

Чтобы получить зависимость для определения скорости, запишем уравнение Бернулли для горизонтальной струйки, находящейся на расстоянии z от дна потока, выбрав сечение струйки так, чтобы сечение $I-I$ находилось в непосредственной близости от входного отверстия трубки, а сечение $II-II$ совпадало с плоскостью входного отверстия трубки. Потерями напора пренебрегаем. За плоскость сравнения $0-0$ принимаем дно потока. Имеем:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (80)$$

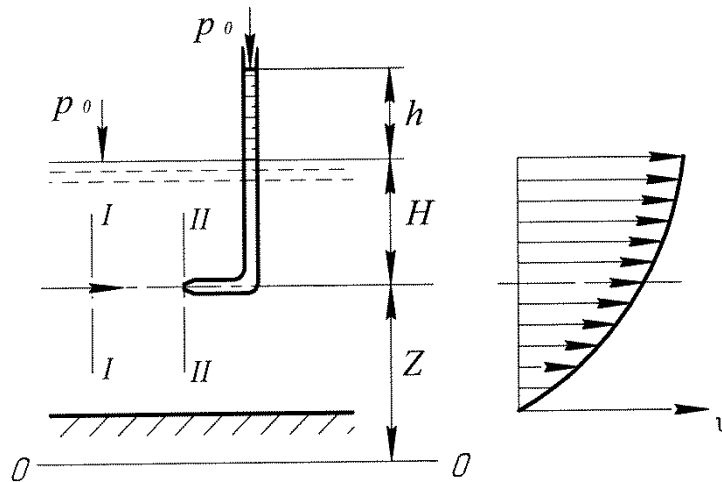


Рис. 39. Гидродинамическая трубка Пито (а) и эпюра распределения скоростей в безнапорном потоке жидкости (б)

Заметим, что $Z_1 = Z_2$; $v_2 = 0$, т.е. жидкость в трубке Пито не движется, а стоит на месте; $h_{w1-2} = 0$; тогда:

$$\frac{p_1}{\rho g} = H; \quad \frac{p_2}{\rho g} = H + h,$$

где H – глубина погружения трубки Пито от свободной поверхности, м;
 h – высота подъема жидкости выше уровня свободной поверхности, м.
 С учетом замечаний уравнение (80) запишется в следующем виде:

$$\frac{v_1^2}{2g} = h.$$

Обозначив $v_1 = v$, получим $h = \frac{v^2}{2g}$ или

$$v = \sqrt{2g \cdot h}. \quad (81)$$

Перемещая носик трубки по вертикали в сечении потока, определяют скорость жидкости в различных точках взятой вертикали и получают так называемые

мую эпюру распределения скорости по данной вертикали живого сечения потока (рис. 39, б).

2.8.3. Гидродинамическая трубка Пито – Прандтля

Гидродинамическая трубка Пито – Прандтля предназначена для измерения скорости течения жидкости в напорных трубопроводах). Принципиально трубка Пито - Прандтля состоит из двух трубок (рис. 40), одна из которых представляет собой обычный пьезометр 1, показывающий пьезометрический

напор $\frac{p}{\rho g}$, а другая – трубка Пито 2, которая измеряет величину полного

$\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$ напора.

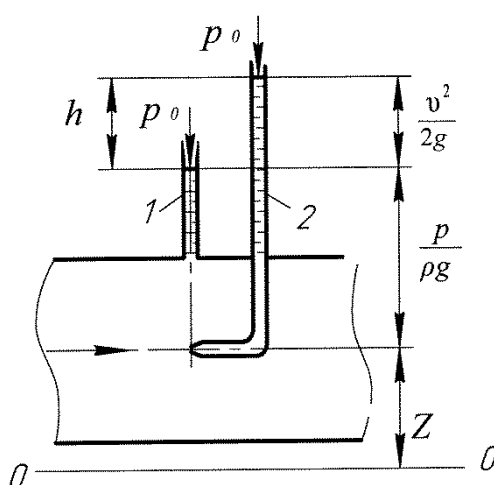


Рис. 40. Гидродинамическая трубка Пито–Прандтля
1 – пьезометр; 2 – трубка Пито

Разность уровней жидкости в обеих трубках h дает величину скоростного напора $\frac{v^2}{2g}$, по которой и определяется скорость.

2.8.4. Карбюратор

Карбюратором называется устройство, предназначенное для приготовления горючей смеси топлива в двигателях внутреннего сгорания путем подсоса топлива и перемешивания его с воздухом.

Схема простейшего карбюратора приведена на рис. 41. Поплавковая камера с поплавком и игольчатым клапаном обеспечивает постоянный уровень топлива на входе в жиклер, который дозирует количество топлива, поступающего через распылитель в воздушный канал карбюратора. Дроссельная заслонка регулирует количество горючей смеси, поступающей из карбюратора во впускной трубопровод и цилиндры двигателя. В воздушном канале топливо распыливается и перемешивается с воздухом.

Движение воздуха, а затем и горючей смеси через карбюратор и впускной трубопровод осуществляется за счет перепада давлений между окружающей средой и цилиндрами двигателя, в которых поршни в процессе впуска совершают насосные хода. Наибольшее значение разрежения достигает в диффузоре (Δp до 10 кПа), а в смесительной камере оно в 2,0...2,2 раза меньше.

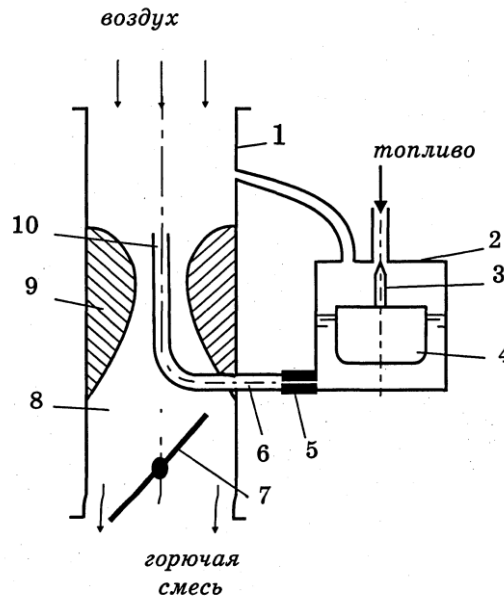


Рис. 41. Принципиальная схема простейшего карбюратора:
 1 – воздушный канал; 2 – поплавковая камера; 3 – иглообразный канал;
 4 – поплавок; 5 – жиклер топливный; 6 – топливоподводящий
 трубопровод; 7 – дроссельная заслонка; 8 – смесительная камера;
 9 – диффузор; 10 – распылитель топлива

Движение топлива из поплавковой камеры и его истечение через распылитель осуществляется за счет перепада давлений в пространстве над топливом и в диффузоре. Для предотвращения вытекания топлива при неработающем двигателе и при наклонном положении карбюратора устье распылителя располагается на 2...5 мм выше уровня топлива в поплавковой камере. Чтобы исключить влияние загрязнения воздушного фильтра двигателя на исечение топлива через распылитель, пространство над топливом в поплавковой камере карбюратора соединяется с началом воздушного канала; такой карбюратор называется *сбалансированным*.

Распыливание топлива происходит из-за разности в скоростях движения воздуха и самого топлива. При разности в $4...6 \frac{M}{c}$ наступает разрушение струи, при разности в $30 \frac{M}{c}$ и более наступает полное распыливание.

2.9. Режимы движения вязкой жидкости. Число Рейнольдса

Установившееся движение жидкости является равномерным, если при этом живое сечение, скорость течения и глубина остаются постоянными по длине

потока. Такое движение жидкости подчиняется основным законам динамики и является предпочтительным при проектировании различных гидравлических течений. Основное уравнение равномерного движения жидкости выглядит так:

$$\frac{\tau}{\rho g} = R \cdot I, \quad (82)$$

где τ – касательные напряжения или сила трения, приходящаяся на единицу площади боковой поверхности потока, Па ;
 R – гидравлический радиус – отношение поперечного сечения к периметру потока, м ;
 I – гидравлический уклон, доли или % .

Среднюю скорость установившегося равномерного движения определяют по формуле Шези:

$$v = C \sqrt{R \cdot I}, \quad (83)$$

где C — коэффициент Шези, $\frac{M^{1/2}}{c}$ (приложение 6).

Расход жидкости при равномерном движении жидкости определяют из выражения:

$$Q = S \cdot C \sqrt{R \cdot I}, \frac{M^3}{c}, \quad (84)$$

где S – площадь живого сечения потока, m^2 .

2.9.1. Режимы движения вязкой жидкости

Рядом исследователей еще в первой половине XIX века было замечено, что в потоке жидкости его частицы могут совершать движение по принципиально различным траекториям, и в соответствии с этим появилось понятие о существовании различных «режимов движения» жидкости.

В 1839 – 1854 гг. немецким инженером - гидротехником Г. Хагеном было открыто существование двух принципиально разных режимов движения жидкости. В 1880 г. этот вопрос рассматривал Д. И. Менделеев.

Определенная ясность в этот вопрос была внесена английским физиком и инженером Осборном Рейнольдсом, который в 1883 г. опубликовал результаты своих наблюдений на лабораторной установке за водой, движущейся с различными скоростями в стеклянной трубке. опыты показали, что при малых скоростях движения воды (рис. 42), подкрашенная жидкость в виде тонкой струйки внутри ее не перемешивается с основным потоком. Такой режим получил название **ламинарного** (от латинского слова *lamina*, означающего слой, полоска).

После достижения определенной для данных условий опыта средней скорости движения, когда движение частиц жидкости приобретает как бы беспорядочный характер, струйка краски начинает размываться, отчего вся вода по сечению трубки окрашивается. Этот режим получил название **турбулентного** (от латинского слова *turbulentus*, означающего беспорядочный).

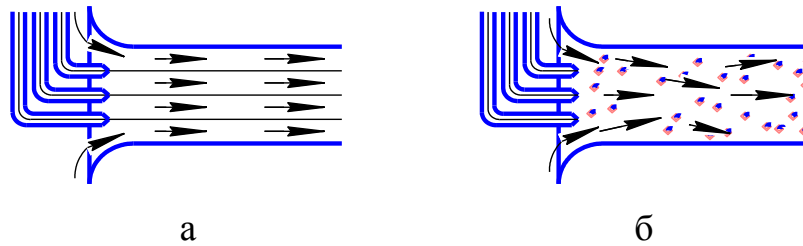


Рис. 42. К определению режима движения жидкости
а) ламинарный режим; б) турбулентный режим

Опыты позволили установить, что режим движения зависит не только от скорости v , но и от вязкости ν и диаметра трубы d . Рейнольдс установил, что критерием режима движения жидкости является безразмерная величина, которая впоследствии была названа его именем – *числом Рейнольдса* Re . Для труб цилиндрического сечения число Рейнольдса определяется по формуле

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}, \quad (85)$$

где v – средняя скорость потока жидкости, $\frac{м}{с}$;

ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\frac{м^2}{с}$.

Критерий режима движения, соответствующий нижней критической скорости $v_{н.к}$, называют нижним критическим числом Рейнольдса. На основании экспериментальных опытов установлено, что нижнее критическое число Рейнольдса для труб при напорном движении $Re_{н.к} = 2320$. По критическому числу устанавливают вид режима движения жидкости. Так, если $Re < 2320$, то поток будет иметь ламинарный режим движения, так как $v < v_{н.к}$ и режим находится в ламинарной зоне. Если же $Re > 2320$, то поток находится в зоне неустойчивого движения (зона переходного режима), до значения $Re = 13800$. Далее следует зона устойчивого турбулентного течения.

С физической точки зрения критерий Рейнольдса есть отношение сил инерции потока к силам трения при его движении.

2.9.2. Шероховатость внутренней поверхности трубопроводов

Определение режима движения жидкости в практических расчетах имеет очень важное значение. Опыты показали, что потери напора по длине потока при ламинарном режиме движения пропорциональны средней скорости течения в первой степени:

$$h_w = k_l \cdot v,$$

где h_w – потери напора по длине потока, $м$;

k_l – коэффициент пропорциональности ламинарного режима движения жидкости;

v – средняя скорость течения потока, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Для турбулентного режима движения потери напора по длине потока пропорциональны средней скорости течения в степени n :

$$h_w = k_T \cdot v^n,$$

где k_T – коэффициент пропорциональности турбулентного режима движения жидкости;

n – показатель степени, изменяющийся от 1,75 до 2.

Экспериментальными исследованиями было установлено, что при турбулентном режиме движения жидкости основную часть потока по сечению составляет турбулентное ядро, а около стенок трубы существует пограничный слой, состоящий из тонкого ламинарного и тонкого переходного слоев (рис. 43).

Толщина ламинарного слоя δ определяется по формуле

$$\delta = \frac{30 \cdot d}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} = \frac{30 \cdot v}{v \cdot \sqrt{\lambda}}, \quad (86)$$

где δ – толщина ламинарного слоя, м;

d – диаметр трубопровода, м;

Re – число Рейнольдса;

λ – коэффициент гидравлического трения;

ν – кинематический коэффициент вязкости, $\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$;

v – средняя скорость потока, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Стенки труб имеют шероховатость. В зависимости от соотношения ламинарного слоя δ и высоты абсолютной шероховатости Δ различают:

- гидравлически гладкие трубы, если $\delta > \Delta$ (рис. 43, б)
- и гидравлически шероховатые, если $\delta < \Delta$ (рис. 43, в).

Так как фактическая высота всех выступов шероховатости не является одинаковой, то вводится понятие эквивалентной шероховатости, которая обозначается или $\Delta_{\text{экв}}$ или k_s , т.е. такая равномерная шероховатость, которая дает при подсчете одинаковую с заданной шероховатостью величину потерь напора по длине $h_{\text{тр}}$.

Шероховатость обычно характеризуется не высотой выступов шероховатости Δ , а отношением Δ к радиусу или диаметру трубопровода, т. е. $\frac{\Delta}{r}$ или $\frac{\Delta}{d}$, и называется **относительной шероховатостью**.

Следует заметить, что при различных числах Рейнольдса одна и та же труба может быть как гладкой, так и шероховатой. Ниже приведены численные значения эквивалентной шероховатости для некоторых поверхностей, мм.

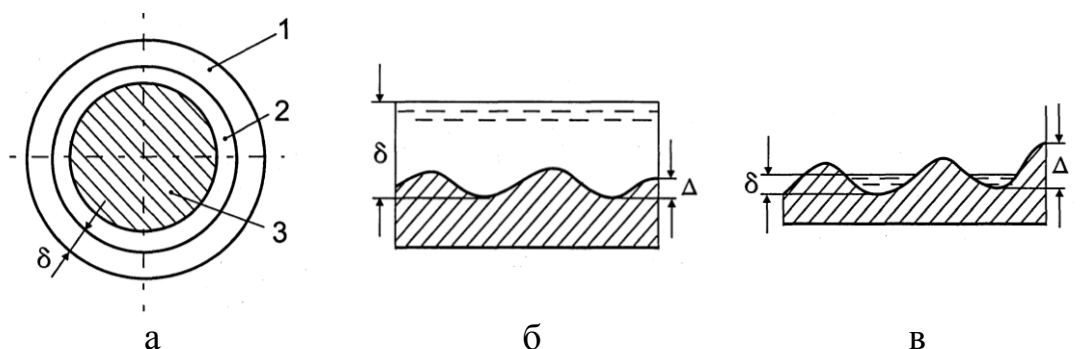


Рис. 43. Структура турбулентного потока: а – пограничные слои; б – гидравлически гладкая труба; в – гидравлически шероховатая труба; 1 – ламинарный слой; 2 – переходный слой; 3 – турбулентное ядро; Δ - абсолютная шероховатость; δ – толщина ламинарного слоя.

1. Стекланные трубы	0,005 ÷ 1,0
2. Цельнотянутые металлические трубы:	
латунные	0,005 ÷ 0,01
новые стальные	0,02 ÷ 0,03
стальные находящиеся в эксплуатации	1,2 ÷ 1,5
3. Цельносварные трубы	
новые	0,04 ÷ 0,1
бывшие в эксплуатации	0,1 ÷ 0,15
сильно корродированные	2,0
4. Чугунные трубы:	
новые	0,25 ÷ 1,0
бывшие в эксплуатации	1,0 ÷ 1,5
5. Бетонные трубы:	
с хорошей затиркой	0,3 ÷ 0,8
среднего качества затирки	2,5
6. Асбоцементные трубы	
новые	0,05 ÷ 0,1
бывшие в эксплуатации	0,6
7. Деревянные поверхности	
из тщательно остроганных досок	0,15
то же из хорошо отстроганных досок	0,3

2.9.3. Силы трения и закон распределения скоростей при ламинарном режиме движения жидкости.

При ламинарном режиме движения жидкости в трубе, в ней возникают силы трения и она начинает двигаться как бы цилиндрическими бесконечно тонкими слоями с различными скоростями. Скорости слоев жидкости от продольной оси трубопровода к ее стенкам уменьшаются по параболическому закону. На оси

трубы они имеют максимальное значение. На поверхности стенок трубы скорость течения равна нулю. Слои жидкости, движущиеся с меньшей скоростью, тормозят движение слоев, имеющих бóльшую скорость. Цилиндрические слои жидкости, движущиеся с большей скоростью, скользят по слоям жидкости, движущимся с меньшей скоростью. На поверхностях смежных слоев жидкости благодаря наличию сцепления частиц жидкости между собой и со стенками, ограждающими поток, в процессе скольжения развиваются силы трения. Силы трения, появившиеся на граничащих поверхностях между слоями жидкости, осуществляют тормозящее действие, что и приводит к возникновению разных скоростей движения отдельных частиц жидкости.

Главной причиной возникновения сил трения при движении потока следует считать разность скоростей между движущимися слоями жидкости. Чем больше разность скоростей, тем больше по величине возникающие силы трения, силы гидравлических сопротивлений.

Рассмотрим ламинарный режим движения в цилиндрической трубе (рис. 44). В модели такое движение можно представить состоящим из множества телескопически выдвинутых цилиндров толщиной dr . Огибающую этих цилиндров можно рассматривать как эпюру скоростей струек.

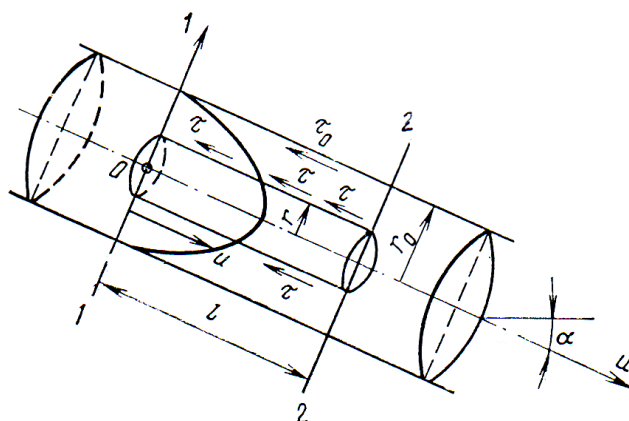


Рис. 44. Эпюра скоростей при ламинарном режиме движения

Касательное напряжение τ на боковой поверхности выделенного цилиндра определим в соответствии с законом Ньютона о силе сопротивления в жидкости, а именно

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}.$$

При направлении координатных осей u и n , указанном на рис. 44 – ось скорости u вдоль оси трубы, ось нормали к направлению скорости – вдоль радиуса r , тогда можем записать:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Знак минус потому, что здесь при $dr > 0$ имеем $du < 0$.

После подстановки в уравнение равномерного движения получим дифференциальное уравнение распределения скорости в таком виде:

$$-\mu \frac{du}{dr} = \rho g \frac{r h_w}{2 l}.$$

Проинтегрировав, найдем

$$-u = \frac{\rho g h_w}{2\mu l} \int r dr = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} r^2 + C.$$

Определим постоянную интегрирования C по условиям на границе. В точке у стенки трубы $r = r_0$, т. е. радиусу трубы, а скорость $u = 0$. Тогда

$$0 = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} r_0^2 + C \text{ и } C = -\frac{\rho g h_w}{4\mu l} r_0^2.$$

Следовательно, уравнение примет вид:

$$-u = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} (r_0^2 - r^2)$$

или окончательно

$$u = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} (r_0^2 - r^2). \quad (87)$$

Тогда расход потока в трубе

$$Q = \int_S u dS = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} 2\pi \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\rho g h_w}{4\mu l} 2\pi \left(\frac{r_0^4}{2} - \frac{r_0^4}{4} \right) = \frac{\rho g h_w}{8\mu l} \pi r_0^4. \quad (88)$$

Разделив (88) на πr_0^2 , найдем среднюю скорость

$$v = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{\rho g h_w}{8\mu l} r_0^2. \quad (89)$$

Следовательно, средняя скорость равна половине максимальной.

Потерянный напор найдем из (90), учитывая, что $v = \frac{\mu}{\rho}$:

$$h_w = \frac{8\mu l v}{\rho g r_0^2} = \frac{8v l v}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 g}.$$

Умножив и разделив правую часть на $2v$ и затем преобразовав, получим:

$$h_w = \frac{8v l v}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 g} \frac{2v}{2v} = \frac{64 l v^2}{\frac{v d}{v} d 2g}.$$

Но $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$, тогда

$$h_w = \frac{64}{Re} \frac{l v^2}{d 2g}. \quad (90)$$

или, обозначив $\lambda = \frac{64}{Re}$,

$$h_w = \lambda \frac{l v^2}{d 2g}. \quad (91)$$

Формула (91) называется формулой Дарси – Вейсбаха. Здесь λ – коэффициент гидравлического сопротивления в трубах. Как видно, при ламинарном движении коэффициент λ является функцией числа Рейнольдса.

2.9.4. Турбулентный режим движения жидкости

Турбулентное состояние потока характеризуется непрерывным перемешиванием множества мельчайших водоворотных образований, возникающих у твердых границ и перемещающихся внутрь потока.

Зарождение водоворотных образований обязано вязкости жидкости. На поверхности контакта жидкости и твердых стенок молекулы жидкости и молекулы твердых стенок находятся на расстоянии силового их взаимодействия. В связи с этим частицы жидкости непосредственно у стенок задерживаются, и скорость их равна нулю. Соседние с ними частицы приходят в движение, и их скорость возрастает с удалением от стенок. При этом возникает вращательное движение отдельных масс жидкости.

Сложение двух движений – поступательного и вращательного - возбуждает силу, приложенную к массе частицы и направленную нормально к продольной скорости потока (эффект Магнуса). Под действием этой силы частицы жидкости перемещаются в центральную область потока, образуя процесс перемешивания. Наличие шероховатости стенок содействует такому перемешиванию и в некоторых случаях может оказаться даже главной причиной явления. Этот процесс, очевидно, возможен при достаточно больших скоростях течения, при которых стабилизирующее воздействие вязкости не может воспрепятствовать такому перемешиванию. Известно, что турбулентное движение возникает при скоростях больше $v_{кр}$ (когда число Рейнольдса больше $Re > 2300$).

Процесс перемешивания обуславливает возникновение *пульсации скорости*, т. е. такое изменение ее величины в данной точке, при котором отклонения от некоторой средней происходят в обе стороны. Объясняется это тем, что через данную точку пространства последовательно проходят разные частицы жидкости с разными скоростями как по величине, так и по направлению.

Обычно наибольшее внимание уделяется явлению пульсации продольной скорости u_x , измеряемой в точке поперечного сечения с помощью различных гидрометрических приборов.

В связи с явлением пульсации турбулентное движение оказывается неустановившимся, и в любой момент времени имеет место мгновенное поле скоростей (и других кинематических параметров потока). При этом возможно говорить о средних значениях скорости за тот или иной промежуток времени. Чем больше промежуток времени осреднения, тем точнее определяется данная величина. Определенная таким образом скорость называется *осредненной скоростью в данной точке*.

Связь между *мгновенной и осредненной скоростью* определяется так:

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x,$$

где u_x , \bar{u}_x , u'_x – соответственно мгновенная, осредненная и пульсационная составляющие скорости.

Процесс перемешивания вызывает перенос количества движения из области малых скоростей потока в область больших скоростей и обратно. Очевидно, массы с малыми скоростями при входе в область течений с большими скоростями будут тормозить движение в этой области, т. е. оказывать силовое противодействие движению. Это будут силы инерции, и, следовательно, физическая природа турбулентных сопротивлений – инерционная. Масса жидкости с большими скоростями, оказывая давление на присоединенные массы, ускоряет их движение и расходует при этом свою энергию (при этом ускорении возникают силы инерции).

Прандтль при установлении закона распределения скоростей принял следующую схему течений в трубопроводе. У стенок трубы скорости принимаются нулевыми, к центру (оси трубы) они постепенно увеличиваются, т.е. у стенок трубы создается *ламинарный слой* небольшой толщины, за пределами которого располагается центральная основная часть потока – *турбулентное ядро*. В связи с малыми скоростями течения в ламинарном (пристенном) слое скорости быстро нарастают, градиент скорости здесь велик, и его можно приближенно считать величиной постоянной. В пределах центрального ядра турбулентное течение и изменение скоростей происходят не так интенсивно. Иллюстрация такой схемы показана на рис. 45.

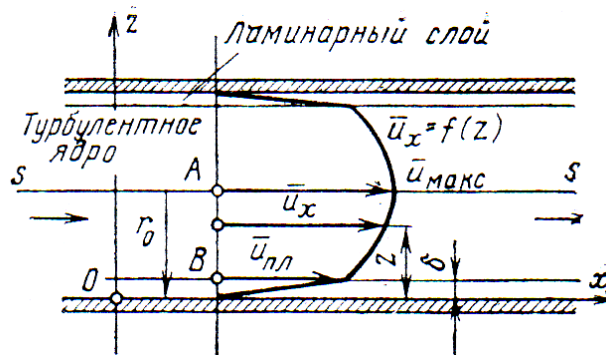


Рис. 45. Эпюры скоростей при турбулентном режиме движения

Для ламинарного режима касательные напряжения определяются по формуле Ньютона.

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy}$$

При турбулентном режиме движения

$$\tau = \mu \frac{du_x}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2, \quad (92)$$

где l – путь перемешивания, аналогичен средней длине пробега молекул в кинетической теории газов.

По данным исследований Г.А. Гуржиенко, вблизи стенок трубы зависимость l от y оказалась линейной, поэтому можно написать

$$l = ky, \quad (93)$$

где k – коэффициент пропорциональности, называемый универсальной постоянной.

По Г. А. Гуржиенко, $k = 0,435$. Следовательно, $l = 0,435y$. Первый член $\mu \frac{du_x}{dy}$ характеризует вязкостное трение, которое соответствует силам трения в

ламинарном движении. Вторым член $\rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2$ выражает дополнительное касательное напряжение от пульсации, возникающей в турбулентном потоке из-за наличия поперечного движения отдельных частиц жидкости. С увеличением скорости течения (числа Рейнольдса) главное влияние на величину касательных напряжений оказывает второй член в уравнении (92) и при больших числах Рейнольдса касательные напряжения оказываются пропорциональными квадрату градиента скорости.

Благодаря пульсации в турбулентном потоке жидкости закон распределения скоростей по живому сечению иной, чем при ламинарном. При турбулентном движении происходит выравнивание скоростей по сечению. Для развитого турбулентного режима движения жидкости ввиду малой ее массы, участвующей в пограничном слое, первый член правой части уравнения (92) по сравнению со вторым членом является малой величиной. поэтому им можно пренебречь. Тогда уравнение (92) будет иметь вид

$$\tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \quad (94)$$

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = l \frac{du_x}{dy}. \quad (95)$$

Подставляя значение $l = ky$ в формулу (95) и обозначая $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_\partial$, будем иметь

$$du_x = \frac{u_\partial}{ky} dy, \quad (96)$$

где u_∂ – называется динамической скоростью, так как имеет размерность скорости.

Примем $u_\delta = const$, тогда после интегрирования дифференциального уравнения (96) получим логарифмический закон распределения скоростей по сечению для турбулентного потока:

$$u_x = \frac{u_\delta}{k} \ln y + C. \quad (97)$$

Имея ввиду, что при $y = r_0$ скорость в центре трубы максимальна (u_{\max}), определим постоянную интегрирования C . При $k = 0,435$ аналитическое выражение, характеризующее закон распределения скорости по сечению трубы, примет вид:

$$\frac{u_{\max} - u_x}{u_\delta} = 5,3 \ln \frac{r_0}{y}.$$

2.10. Классификация потерь напора

Одним из важнейших вопросов гидромеханики является определение потерь энергии при движении жидкости. При движении жидкости по трубопроводам возникают потери энергии, которые зависят от длины трубопроводов (пропорциональные длине канала) и потери энергии в местных сопротивлениях – запорная арматура, повороты, расширения и сужения трубопроводов – вызываемые изменениями скорости потока либо по величине, либо по направлению. Потери энергии потока, как на преодоление сопротивлений по длине трубопроводов, так и на преодоление местных сопротивлений, в конечном счете, обусловлены вязкостью жидкости, а следовательно, теряемая механическая энергия рассеивается и переходит в тепловую. Важность определения потерь напора h_w (или потерь давления Δp) связана с необходимостью расчета затрат энергии, требуемых для компенсации этих потерь при перемещении жидкостей, например, с помощью насосов, компрессоров и т. д.

Потерянный напор является суммой двух слагаемых:

$$h_w = h_{mp} + h_{mc}, \quad (98)$$

где h_{mp} , h_{mc} – потери напора вследствие трения и местных сопротивлений, соответственно.

Для вычисления потерь напора при турбулентном режиме обычно пользуются частными эмпирическими формулами

$$h_{mp} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}; \quad (99)$$

$$h_{mc} = \xi \frac{v^2}{2g}, \quad (100)$$

где λ – коэффициент гидравлического трения;
 ξ – коэффициент местного сопротивления;

- l – длина трубопровода, м ;
 d – диаметр трубы, м ;
 v – средняя скорость движения жидкости в трубопроводе, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$;
 g – ускорение свободного падения, $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Средняя скорость, входящая в формулы (99) и (100) – эта такая, одинаковая для всех точек сечения скорость, при которой за единицу времени через данное сечение проходит тот же расход жидкости, что и при действительном распределении скоростей по сечению потока. Среднюю скорость определяют по уравнению расхода

$$v = \frac{Q}{S}, \quad (101)$$

- где Q – объемный расход, т.е. объем жидкости, проходящий через живое сечение потока за единицу времени, жидкости, $\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$;
 S – живое сечение потока (в случае течения по трубе, равное площади поперечного сечения трубы), м^2 .

Из формул (99) и (100) следует, что потери энергии на трение и местные сопротивления пропорциональны скоростному и динамическому напору $\left(\frac{v^2}{2g} \right)$, который является мерой кинетической энергии потока, отнесенной к единице объема жидкости. В действительности эта зависимость значительно сложнее, так как коэффициент трения λ и коэффициент местного сопротивления ξ не являются постоянными величинами, а существенно зависят от скорости течения жидкости, ее плотности и вязкости, а также диаметра и шероховатости трубы, по которой движется поток.

Величина коэффициента трения проявляется по-разному при различных режимах движения потока в трубе. В одном диапазоне чисел Рейнольдса, характеризующих режим движения, на величину λ влияет в большей степени скорость, в другом диапазоне преобладающее влияние оказывают геометрические характеристики – диаметр и шероховатость трубы (высота выступов шероховатости Δ). В связи с этим различают четыре области сопротивления, в которых изменение λ имеет свою закономерность.

Первая область – область ламинарного потока, ограниченная значениями $Re < 2300$, в которой λ зависит от Re и не зависит от величины Δ , определяется по формуле Пуазейля

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (102)$$

При этом значении λ потери напора по длине трубы пропорциональны скорости в первой степени. Все остальные области сопротивления находятся в зоне турбулентного режима с различной степенью турбулентности.

Вторая область – гидравлически гладкие трубы. Поток в трубе при этом турбулентный, но у стенок трубы сохраняется слой жидкости, в пределах которого движение остается ламинарным. Трубы считаются гидравлически гладкими, если толщина ламинарного слоя δ больше высоты выступов шероховатости Δ . В этом случае ламинарный слой покрывает неровности стенок трубы и последние не оказывают тормозящего влияния на основное турбулентное ядро потока. Границу зоны гидравлически гладких труб можно определить из зависимости:

$$\text{Re} = 27 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{1,14}. \quad (103)$$

Для гидравлически гладких труб, т. е. при условии $\delta > \Delta$ коэффициент λ может быть определен по формуле:

$$\lambda = 0,316 \cdot \text{Re}^{-0,25} = \frac{0,316}{\sqrt[4]{\text{Re}}}, \quad (104)$$

которая применима при значениях чисел Рейнольдса $\text{Re} \leq 10^5$.

Третья область – переходная от области гидравлически гладких труб к квадратичной области. В этой области толщина ламинарного слоя δ равна или меньше выступов шероховатости Δ , которые в этом случае выступают как препятствие у стенок, увеличивая турбулентность, а, следовательно, и сопротивление в потоке. Для определения λ в переходной области сопротивления применима формула

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left[\frac{\Delta}{3,7} + \left(\frac{6,81}{\text{Re}} \right)^{0,9} \right]. \quad (105)$$

Потери напора по длине трубы в переходной области сопротивления пропорциональны скорости в степени от 1,75 до 2,0.

Четвертая область – гидравлически шероховатых труб или квадратичного сопротивления (автомодельная область). Основное влияние на сопротивление потоку оказывает шероховатость стенок трубы. Чем больше выступы шероховатости Δ , тем большую турбулентность они вызывают, тем больше будут затраты энергии в потоке на преодоление сопротивлений.

В квадратичной области сопротивления коэффициент λ не зависит от скорости, а становится функцией только относительной шероховатости ε , выражаемой отношением абсолютной шероховатости Δ к диаметру трубы

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{d}. \quad (106)$$

Для автомодельной области в уравнении (105) можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках, и оно принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \frac{3,7}{\Delta}. \quad (107)$$

2.11. Местные сопротивления трубопроводов

Помимо прямых участков труб в отдельных местах трубопровода находятся фасонные части – тела, которые являются препятствием на пути движения жидкости. Следствием взаимодействия потока жидкости и этих тел является их сопротивление, т. е. местные сопротивления. Местные сопротивления – в основном сопротивления давления. Их преодолевает поток жидкости при обтекании фасонных частей трубопроводов. Энергия, которая в этом случае затрачивается потоком жидкости, является местной потерей энергии. У потока жидкости, протекающего через местные препятствия трубопроводов, вектор скорости изменяет либо величину, либо направление, либо и величину и направление. Например, при внезапном сужении в трубе величина скорости потока жидкости возрастает; в повороте вектор скорости потока жидкости изменяет направление, а в обыкновенном вентиле вектор скорости потока жидкости неоднократно изменяет и величину, и направление. Изменение вектора скорости течения жидкости (при сравнительно больших значениях числа Рейнольдса) в указанных местах трубопроводов приводит к отрыву потока от обтекаемых стенок и образованию вихрей. Наличие местных отрывов вихрей и последующая деформация поля скоростей являются причиной местных потерь напора.

Значения коэффициентов ξ для наиболее часто встречающихся местных сопротивлений определяются эмпирически (некоторые из них приведены в табл. 4):

а) внезапное сужение потока (рис. 46), значения коэффициентов сопротивления приведены в табл. 2.

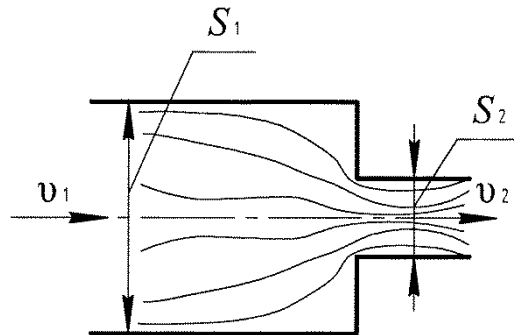


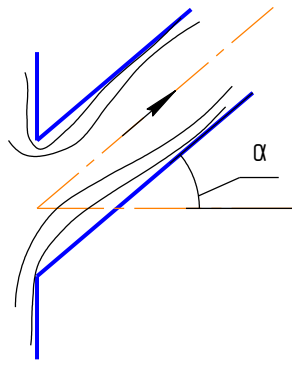
Рис. 46. Схема внезапного сужения потока

Таблица 2

$\frac{S_2}{S_1}$	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
ξ	0,5	0,5	0,42	0,33	0,25	0,15

б) трубопровод расположен под углом α к стенке резервуара (рис. 47)

$$\xi = 0,505 + 0,303 \sin \alpha + 0,226 \sin 2\alpha. \quad (108)$$

Рис. 47. Труба расположена под углом α к стенке

в) трубопровод расположен перпендикулярно к стенке резервуара, ребра входной кромки острые (рис. 48) $\xi_{\text{вх}} = 0,5$.

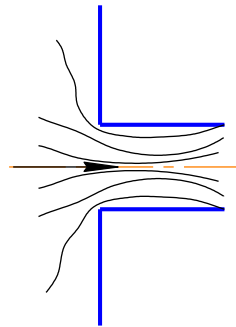
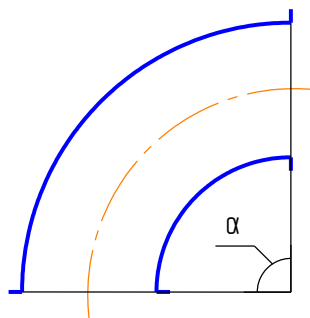


Рис. 48. Схема расположения трубопровода

г) колено трубопровода с углом поворота $\alpha = 90^0$ (рис. 49), значения коэффициентов сопротивления в зависимости от радиуса трубы и радиуса закругления приведены в табл. 3

Таблица 3

$\frac{r}{R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ξ	0,131	0,138	0,158	0,206	0,294	0,440	0,661	0,977	1,408	1,578

Рис. 49. Колено трубы с $\alpha = 90^0$

Резкий поворот трубы круглого поперечного сечения на угол α

$$\xi_{\alpha} = \xi_{90^0} \left(-\cos\alpha \right),$$

где ξ_{90^0} – значение коэффициента сопротивления для угла 90^0 (приложение 11); для ориентировочных расчетов следует принимать $\xi_{90^0} = 1$.

Плавный поворот трубы круглого поперечного сечения

$$\xi_{\alpha} = \xi_{90^{\circ}} b.$$

Значение параметра b приведены в приложении 13.

Коэффициент $\xi_{90^{\circ}}$ определяется по формуле Альтшуля:

$$\xi_{90^{\circ}} = 0,2 + 0,001 \cdot 100 \cdot \lambda \sqrt{\frac{d}{R}},$$

где d – диаметр трубопровода, м;

R – радиус закругления, м.

д) трубопровод подключен к резервуару перпендикулярно (рис. 50) $\xi_{\text{вкл}} = 1$.

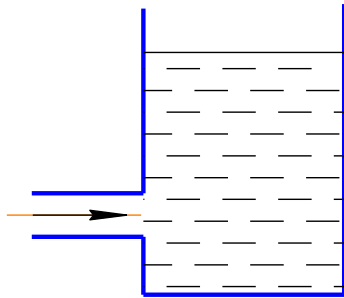


Рис. 50. Схема подключения трубы к резервуару перпендикулярно

е) обратный клапан $\xi_{o.k} = 5$ (рис. 51).

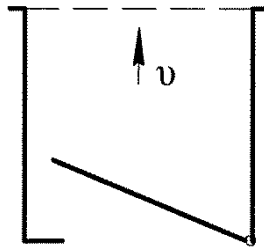


Рис. 51. Схема обратного клапана

ж) внезапное расширение потока (рис. 52)

$$\xi_1 = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2; \quad \xi_2 = \left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)^2. \quad (109)$$

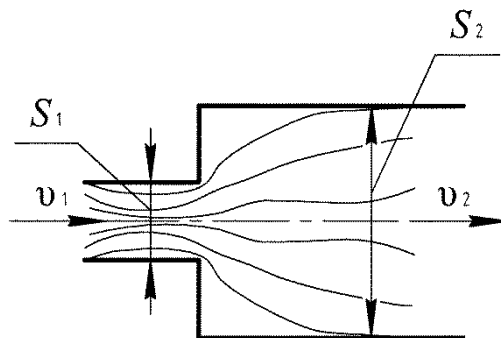
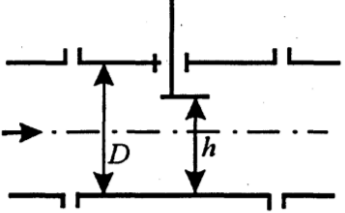
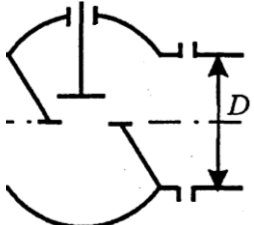
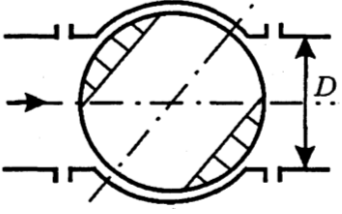
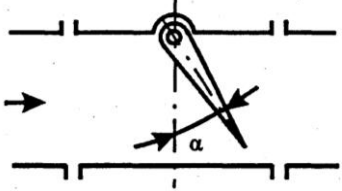
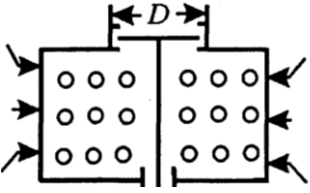


Рис. 52. Схема внезапного расширения трубопровода

Таблица 4

№ п/ п	Наименование местного сопротивления	Показатели									
		1 задвижка 		$D, \text{ мм}$	$D, \text{ мм}$		25	50	100		
$\frac{h}{D}$	ξ			0,33	0,16	0,14					
1				0,9	0,68	0,55					
3/4				4,1	3	2,6					
1/2				32	20	16					
1/4											
2	вентиль 	Полностью открыт	$D, \text{ мм}$	13	25	50	100				
		ξ	10,8	6,1	4,6	4,1					
3	кран пробковый 	α^0	5	10	20	30					
		ξ	0,05	0,29	1,56	5,47					
		α^0	40	50	55	70					
		ξ	17,3	52,6	100	675					
4	клапан обратный 	α^0	70	65	60	55					
		ξ	1,7	2,3	3,2	4,6					
		α^0	45	35	25	15					
		ξ	9,5	20	42	90					
5	клапан всасывающий 	$D, \text{ мм}$	40	50	75	100	200	300	400	500	
		$\xi_{\text{кл}}$									
		клапаны с сеткой	12	10	8,5	7	5,2	3,7	3,1	2,5	
	обратный клапан	-	18	11	8	5,5	3,5	2,5	1,8		

2.12. Основы расчета трубопроводов.

2.12.1. Типы трубопроводов и их классификация

В зависимости от величины местных потерь все трубопроводы делятся на гидравлически длинные и гидравлически короткие.

Трубопроводы, у которых основными являются потери по длине, а местными потерями можно пренебречь, называются *гидравлически длинными трубопроводами* (водопроводами). Трубопроводы, у которых преобладают местные потери, – *короткими*.

Простой трубопровод – из труб одного или двух диаметров и не имеет ответвлений.

Сложный трубопровод имеет магистраль с разветвлениями: разветвленные или тупиковые, замкнутые или кольцевые.

Расчет длинных трубопроводов сводится к определению основных трех величин:

- Q при известных d , l и H ;
- H при известных Q , d и l ;
- d , при заданных Q и H .

Используется уравнение Бернулли:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2} \quad (110)$$

и уравнение постоянства расхода:

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 = const . \quad (111)$$

Уравнение Бернулли приводится к двум видам:

$$H = h_{w1-2} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g} \left[\sum \xi_i + 1 \right] \quad (112)$$

$$H = h_{w1-2} . \quad (113)$$

Выражая расход через расходную характеристику K и гидравлический уклон I получим:

$$Q = K \sqrt{I} , \quad (114)$$

$$K = SC \sqrt{R} , \quad (115)$$

где C – коэффициент потерь Шези;

R – гидравлический радиус, м.

Потери на трение по всей длине трубопровода подсчитываются по формуле:

- для квадратичной области

$$h_{mpIII} = \frac{Q^2 l}{K^2} , \quad (116)$$

- для I и II зон -

$$h_{mp \text{ II, I}} = \lambda \frac{v^2 l}{2g d}. \quad (117)$$

Коэффициенты гидравлического трения λ необходимо определить по формулам, приведенным выше в зависимости от числа Рейнольдса и относительной шероховатости или по графику

$$\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{d}{\Delta}\right). \quad (118)$$

Правила выбора сечений:

- сечения всегда выбираются перпендикулярно направлению движения жидкости;
- сечение выбираются там, где известно максимальное число слагаемых уравнения Бернулли, или там, где нужно что-то определить;
- нумеровать сечения следует так, чтобы жидкость двигалась от 1 – 1 к 2 – 2.

2.12.2. Методика расчета простого трубопровода

Первый случай

Имеем простой трубопровод с постоянным диаметром d , который работает под напором H (рис. 53).

Для сечений 1 – 1 и 2 – 2 напишем уравнение Бернулли:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}.$$

Так как $v_1 = v_2 = 0$, давление $p_1 = p_2 = p_a$, тогда уравнение примет вид:

$$Z_1 - Z_2 = H = h_{w1-2}. \quad (119)$$

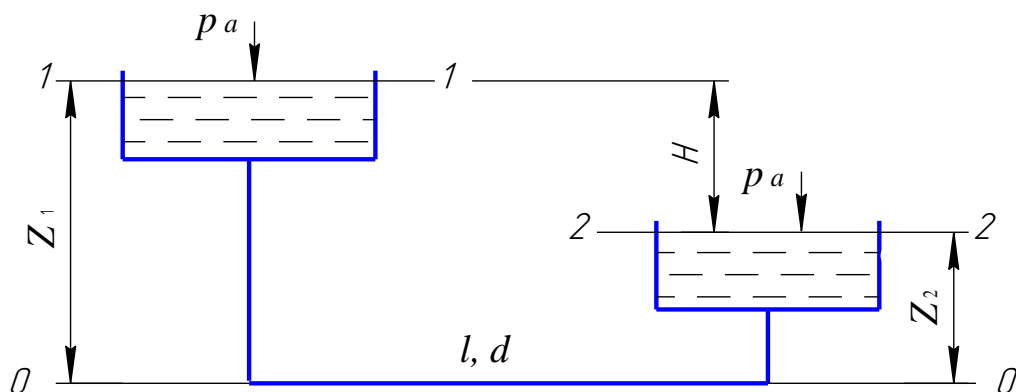


Рис. 53. Схема расчета прямого трубопровода (случай первый)

Так как мы имеем гидравлически длинный трубопровод, то пренебрегая местным сопротивлением, получим

$$H = h_{mp}, \quad (120)$$

где $h_{mp} = \frac{Q^2 l}{K^2}$ и $K = SC\sqrt{R}$.

С учетом местных потерь

$$H = 1,1 \frac{Q^2 l}{K^2}. \quad (121)$$

Второй случай

Трубопровод состоит из последовательно соединенных труб разных диаметров (рис. 54).

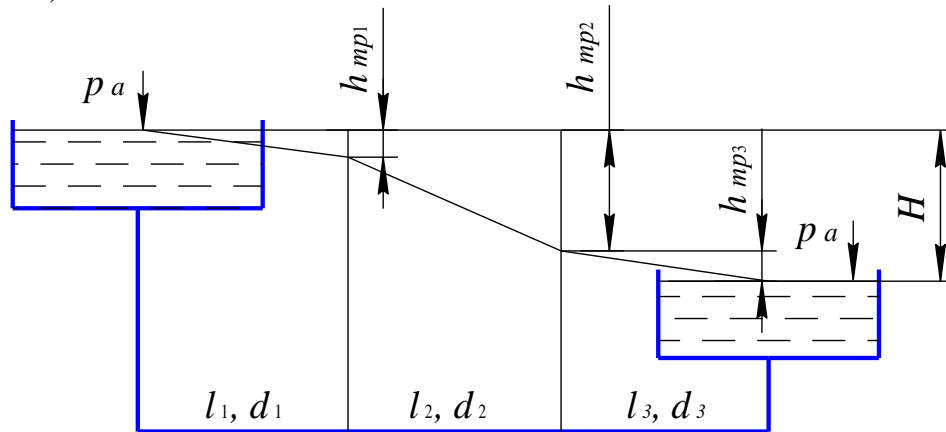


Рис. 54. Схема расчета простого трубопровода (случай второй)

Три участка длиной l_1, l_2, l_3 с равными диаметрами труб d_1, d_2, d_3 . Напор будет расходоваться на преодоление потерь напора по длине:

$$H = h_{mp1} + h_{mp2} + h_{mp3}. \quad (122)$$

Потери на любом участке определим по формуле:

$$h_{mpi} = Q^2 \frac{l_i}{K_i^2}, \quad (123)$$

тогда

$$H = Q^2 \left(\frac{l_1}{K_1^2} + \frac{l_2}{K_2^2} + \frac{l_3}{K_3^2} \right) \quad (124)$$

или

$$H = Q^2 \sum \frac{l_i}{K_i^2}. \quad (125)$$

2.12.3. Расчет гидравлически коротких трубопроводов

Первый случай

Истечение жидкости под уровень (рис. 55).

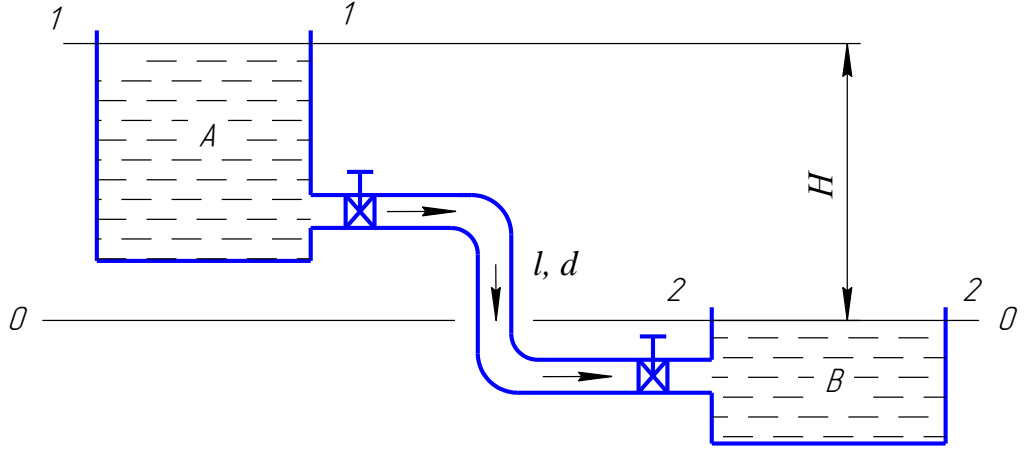


Рис. 55. Схема гидравлически короткого трубопровода (случай первый)

Жидкость перетекает из A в B . Длина трубы l , диаметр d , разность уровней H . Движение – установившееся.

Пренебрегаем скоростными напорами и $p_1 = p_2 = p_a$, тогда уравнение Бернулли имеет вид:

$$H = h_{w1-2}. \quad (126)$$

Потери напора h_w – вход в трубу, кран, два поворота, кран и выход из трубы:

$$h_{w1-2} = h_{ex} + 2h_k + 2h_{пов} + h_{вых}, \quad (127)$$

$$h_{ex} = \xi_{ex} \frac{v^2}{2g}, \quad h_k = \xi \frac{v^2}{2g}.$$

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \xi_{ex} + 2\xi_k + d\xi_{пов} + \xi_{вых} \right). \quad (128)$$

Обозначим ξ_c – коэффициент сопротивления системы.

Так как $\xi_c = \lambda \frac{l}{d} + \xi_{ex} + 2\xi_k + 2\xi_{пов} + \xi_{вых}$, то

$$H = \xi_c \frac{v^2}{2g}, \quad (129)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\xi_c}} \sqrt{2gH}, \quad (130)$$

$$Q = Sv = S \sqrt{\frac{1}{\xi_c}} \sqrt{2gH}. \quad (131)$$

Обозначим: $\sqrt{\frac{1}{\xi_c}} = \mu_c$, тогда

$$Q = \mu_c S \sqrt{2gH}, \quad (132)$$

где μ_c – коэффициент расхода системы;
 S – площадь живого сечения потока, м^2 .

Второй случай

Истечение жидкости в атмосферу (рис. 56).

Из уравнения Бернулли для сечений 1 – 1 и 2 – 2, получим

$$H = h_{w1-2} + \frac{\alpha v^2}{2g}, \quad (133)$$

где

$$h_{w1-2} = \xi_{\text{ex}} \frac{v^2}{2g} + 2\xi_{\text{к}} \frac{v^2}{2g} + 2\xi_{\text{нов}} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (134)$$

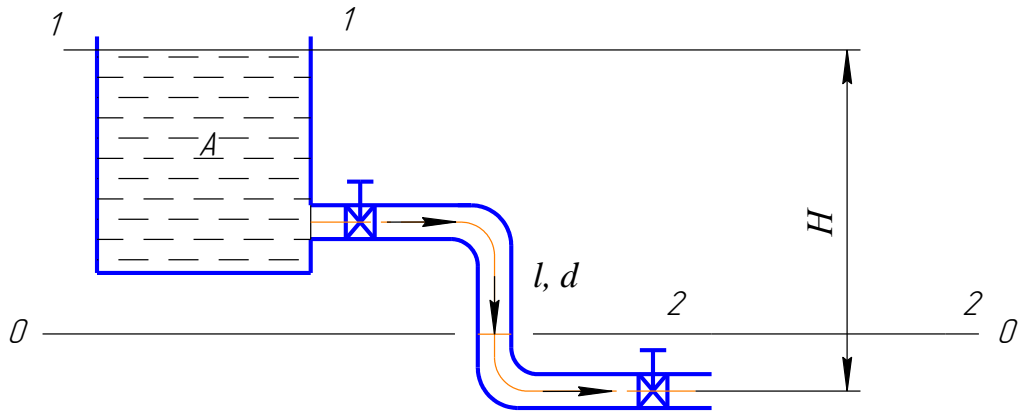


Рис. 56. Схема гидравлически короткого трубопровода (случай второй)

Подставив, имеем

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(\xi_{\text{ex}} + 2\xi_{\text{к}} + 2\xi_{\text{нов}} + \lambda \frac{l}{d} + \alpha \right). \quad (135)$$

Обозначим $\xi_c = \xi_{\text{ex}} + 2\xi_{\text{к}} + 2\xi_{\text{нов}} + \lambda \frac{l}{d} + \alpha$, тогда

$$H = \xi_c + \alpha \frac{v^2}{2g}, \quad (136)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\xi_c + \alpha}} \sqrt{2gH}. \quad (137)$$

Расход жидкости:

$$Q = Sv = S \frac{1}{\sqrt{\xi_c + \alpha}} \sqrt{2gH}, \quad (138)$$

$$Q = \mu_c S \sqrt{2gH}, \quad (139)$$

где $\mu_c = \frac{1}{\sqrt{\xi_c + \alpha}}$ – коэффициент расхода системы.

2.12.4. Расчет сифонного трубопровода

Сифонным называется трубопровод, часть которого располагается выше уровня жидкости верхнего резервуара (рис. 57). Он экономичен, но для его работы необходимо выполнить некоторые условия.

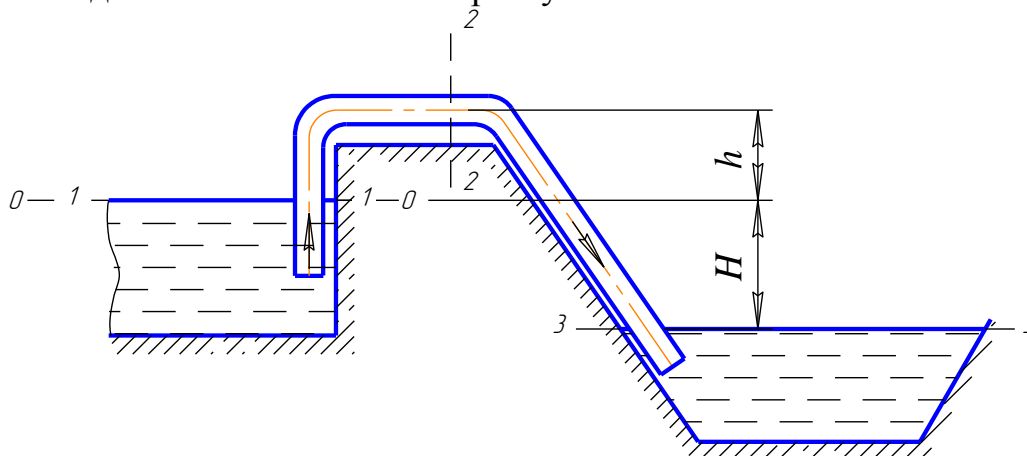


Рис. 57. Схема сифонного трубопровода

При расчете сифонного трубопровода необходимо определить:

- максимальную величину вакуума в сифоне и диаметр трубы при заданном расходе Q ;

- величину вакуума и расход при заданном диаметре трубопровода.

Для определения величины вакуума в сифонном трубопроводе воспользуемся уравнением Бернулли для сечений $1-1$ и $2-2$ относительно плоскости сравнения $0-0$:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_w.$$

Для рассматриваемого случая:

сечение $1-1$: $Z_1 = 0$; $v_1 = 0$; $p_1 = p_a = 9,81 \cdot 10^4$ Па;

сечение $2-2$: $Z_2 = h$; $v_2 = v$.

Так как в системе имеется вакуум, то задачу необходимо решать в абсолютных давлениях.

Принимаем, кроме того $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, тогда

$$\frac{p_a}{\rho g} = h + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{w1-2}. \quad (140)$$

Здесь p_2 – давление в сечении $2-2$, оно меньше атмосферного, поэтому в расчетах необходимо использовать абсолютное давление.

Потери напора в левой части трубы l_1 до сечения $2-2$:

$$h_w = h_{ex} + h_{нов} + h_{mp}, \quad (141)$$

НО

$$h_{ex} = \xi_{ex} \frac{v^2}{2g}; \quad h_{нов} = \xi_{нов} \frac{v^2}{2g}; \quad h_{mp} = \lambda \frac{l_1}{d} \frac{v^2}{2g}.$$

следовательно:

$$h_w = \xi_{ex} \frac{v^2}{2g} + \xi_{нов} \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l_1}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(\xi_{ex} + \xi_{нов} + \lambda \frac{l_1}{d} \right). \quad (142)$$

Подставив в (140), получим:

$$\frac{p_a}{\rho g} = h + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \left(1 + \sum \xi + \lambda \frac{l_1}{d} \right) \quad (143)$$

или

$$\frac{p_a - p_2}{\rho g} = h + \frac{v^2}{2g} \left(1 + \sum \xi + \lambda \frac{l_1}{d} \right),$$

НО

$$\frac{p_a - p_2}{\rho g} = h_{вак}. \quad (144)$$

Поэтому

$$h_{вак} = h + \frac{v^2}{2g} \left(1 + \sum \xi + \lambda \frac{l_1}{d} \right),$$

а высота колена сифона

$$h = h_{вак} - \frac{v^2}{2g} \left(1 + \sum \xi + \lambda \frac{l_1}{d} \right). \quad (145)$$

Для определения расхода Q необходимо написать уравнение Бернулли для сечений 1 – 1 и 3 – 3 относительно плоскости сравнения 0 – 0, проходящей через сечение 1 – 1:

$$H = h_{w1-3} = h_{ex} + h_{нов} + h_{p.n} + h_{вых} + h_{mp} \quad (146)$$

или

$$H = \frac{v^2}{2g} \left(\xi_{ex} + \xi_{нов} + \xi_{p.n} + \xi_{вых} + \lambda \frac{l_1}{d} \right),$$

где ξ_{ex} , $\xi_{нов}$, $\xi_{p.n}$, $\xi_{вых}$ – коэффициенты сопротивления входа, плавного поворота, резкого поворота и выхода соответственно.

Так как

$$\xi_{ex} + \xi_{нов} + \xi_{p.n} + \xi_{вых} + \lambda \frac{l_1}{d} = \xi_c, \quad (147)$$

скорость движения жидкости по трубопроводу и расход:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\xi_c}} \sqrt{2gH},$$

$$Q = vS = \frac{S}{\sqrt{\xi_c}} \sqrt{2gH}, \quad (148)$$

где S – площадь живого сечения трубопровода, m^2 .

2.13. Гидравлический удар в трубопроводах

Профессор Н. Е. Жуковский, исследуя аварии московского трубопровода, пришел к выводу, что они происходят при резком закрытии задвижек.

Комплекс явлений, возникающий в трубопроводе в связи с резким изменением скорости течения жидкости и сопровождающийся резким изменением давления, – *гидроудар*.

Если труба перекрывается полностью за время $t < t_0$ (время перекрытия), то явление представляет собой гидравлический удар с фазами развития:

- остановка движения жидкости « \leftrightarrow »; давление: $p + \Delta p_{ударное}$; c « \leftarrow » - скорость ударной волны в сторону противоположную движению жидкости;
- расширение трубы; давление $p + \Delta p_{ударное}$; изменение направления движения жидкости « \leftarrow »;
- частичное сужение трубы до начальных размеров; давление $p + \Delta p_{ударное}$; изменение направления ударной волны « \rightarrow »; направление движения жидкости « \leftarrow »;
- полное сужение трубы до начальных размеров; давление: $p + \Delta p_{ударное}$; направление движения жидкости « \leftarrow »;
- частичное сужение трубы; давление $p - \Delta p_{ударное}$;
- полное сужение трубы; давление $p - \Delta p_{ударное}$;
- расширение трубы до начальных размеров; давление p_0 ; скорость жидкости равна нулю.

Фаза удара

$$F_c = \frac{2l}{v}. \quad (149)$$

При *прямом гидроударе* вся кинетическая энергия потока преобразуется в потенциальную энергию сжатия жидкости и расширения стенок трубопровода. Продолжительность гидроудара определяется из выражения:

$$\tau_0 < \frac{2l}{c}, \quad (150)$$

где l – длина участка трубопровода, м;

c – скорость ударной волны, $\frac{м}{с}$.

При *непрямом гидроударе* справедливо соотношение

$$\tau_0 > \frac{2l}{c}. \quad (151)$$

В течение этого времени давление жидкости на участке гидроудара возрастает на величину Δp .

Для определения величины Δp воспользуемся теоремой импульсов: импульс силы равен изменению количества движения массы жидкости, протекающей через объем возмущения ($\Delta m v = p \tau$)

Для нашего случая:

$$S \, dl \, \rho (v_0 - 0) = \Delta p S \, d\tau. \quad (152)$$

Так как $\frac{dl}{d\tau} = c$, то

$$\Delta p = \rho c v_0, \quad (153)$$

а повышение напора:

$$\Delta H = \frac{c v_0}{g}, \quad (154)$$

где ρ – плотность, $\frac{кг}{м^3}$;

v_0 – скорость жидкости до гидроудара, $\frac{м}{с}$;

c – скорость ударной волны, $\frac{м}{с}$.

Скорость ударной волны c определяется по формуле Жуковского:

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{d\varepsilon}{E\delta}}}, \quad (155)$$

где E – модуль упругости материала, Па;

ε – модуль упругости жидкости, Па;

d – внутренний диаметр трубы, м;

δ – толщина стенок трубы, м.

Для того, чтобы избежать явления гидроудара, необходимо:

- 1) уменьшить фазы удара $T > \frac{2l}{c}$;
- 2) увеличить продолжительность τ_0 гидроудара;
- 3) устанавливать компенсационные емкости;
- 4) применять гидроаккумуляторы для гашения ударной волны;

- 5) устанавливать предохранительные клапаны;
- 6) испытывать материал труб на прочность (табл. 5).

Значение модулей упругости E для воды и некоторых материалов см. в табл. 5

Таблица 5

Вид материала	$E \cdot 10^{-4}$, МПа
Вода	0,207
Трубы стальные	20,0
Трубы чугунные	10,0
Трубы бетонные	2,0
Трубы деревянные	1,0
Трубы свинцовые	0,5 ÷ 0,02

2. 14. Истечение жидкости через отверстия и насадки

Классификация отверстий:

- 1) *малые* (геометрический напор H постоянный по отверстию, то есть высота отверстия в вертикальной стенке не больше $0,1H$) и *большие* (геометрический напор H переменный по отверстию). Отверстие любого размера в дне сосуда будет малым;
- 2) форма отверстия *правильная, неправильная*;
- 3) *тонкостенные* (толщина стенки не влияет на условия истечения $\delta < 0,67H$) и *толстостенные* (толщина стенки сказывается на условиях истечения);
- 4) отверстия в вертикальной, наклонной стенках и дне сосуда.

Классификация истечений:

- 1) при постоянном и переменном напорах;
- 2) из сосудов с вертикальной осью и неправильной формы;
- 3) свободное (чаще всего в атмосферу, уровень жидкости за отверстием не влияет на истечение), несвободное (из подтопленных или затопленных отверстий, истечение под уровень);
- 4) при всестороннем и неполном сжатии струи;
- 5) при совершенном (стенки и дно сосуда не влияют на истечение) и несовершенном сжатии струи (стенки или дно сосуда влияют на истечение, при $l < 3d$ – расстояние от боковой стенки или дна меньше утроенного размера отверстия).

Истечение жидкости через отверстие может происходить при постоянном и переменном напоре. Если истечение жидкости через отверстие происходит в атмосферу или другую газовую среду, то такое отверстие называется *незатопленным*. Если же истечение идет под уровень, а не в атмосферу – *затопленным*. При истечении жидкости через отверстие различают полное (а) и неполное (б) сжатие струи (рис. 58).

При прохождении через отверстие струя сжимается, и сечение ее в самом тонком месте называется сжатым сечением $C - C$, которое находится на расстоянии $0,5 - 1,0 d$ от стенки.

Площадь живого сечения в $C - C$:

$$S_c = \varepsilon \cdot S, \quad (156)$$

где S_c – площадь струи в сжатом сечении, m^2 ;

S – площадь отверстия, m^2 ;

ε – коэффициент сжатия (для круглого отверстия $\varepsilon = 0,6 - 0,64$).

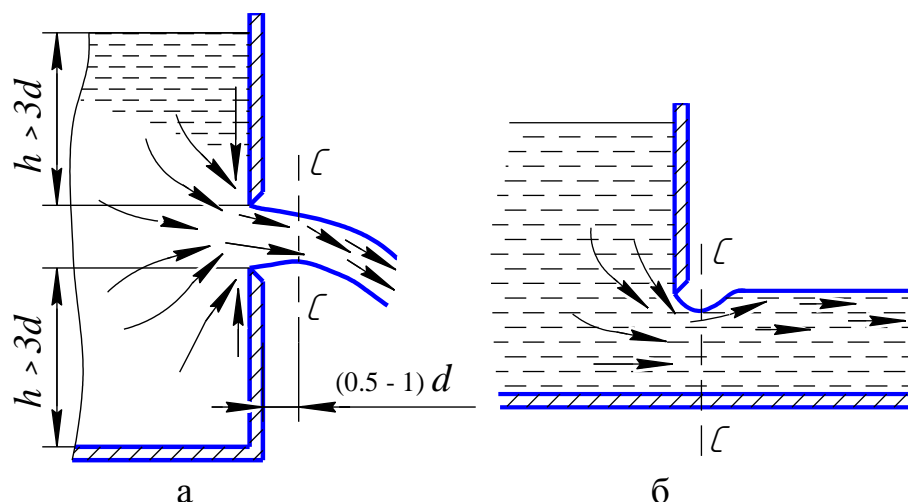


Рис. 58. Форма струи при истечении через отверстие

Форма струи при истечении меняется, и этот процесс называется *инверсией* струи (рис. 59).

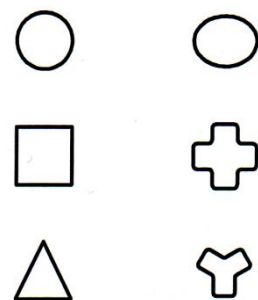


Рис. 59. Изменение формы струи при истечении жидкости

2.14.1. Истечение жидкости через малое отверстие в тонкой стенке

Возьмем сосуд с жидкостью и отверстием, которое работает под постоянным напором H (рис. 60). Определим скорость в сечении $C - C$. Для этого воспользуемся уравнением Бернулли и напишем его для сечений $0 - 0$ и $C - C$ относительно плоскости сравнения $O_1 - O_1$, проходящей через центр тяжести отверстия:

$$Z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = Z_c + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha v_c^2}{2g} + h_{w0-c} \quad (157)$$

Принимаем скорость течения в сечении $C - C$ через v , давление на свободной поверхности и в сечении $C - C$ одинаковым и равным атмосферному p_a ; $Z_0 = H$; $Z_c = 0$, тогда (158) примет вид:

$$\frac{\alpha v_0^2}{2g} + H = \frac{\alpha v^2}{2g} + h_{w0-c}. \quad (158)$$

Но $h_{w0-c} = \xi_{ex} \frac{v^2}{2g}$, т. к. мы имеем только местные потери напора на вход потока в отверстие и уравнение (157) будет таким:

$$\frac{\alpha v_0^2}{2g} + H = \frac{\alpha v^2}{2g} + \xi_{ex} \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} (\alpha + \xi_{ex}). \quad (159)$$

Обозначим

$$\frac{\alpha v_0^2}{2g} + H = H_0 \text{ — (полный напор),}$$

тогда

$$H_0 = \frac{v^2}{2g} (\alpha + \xi_{ex}). \quad (160)$$

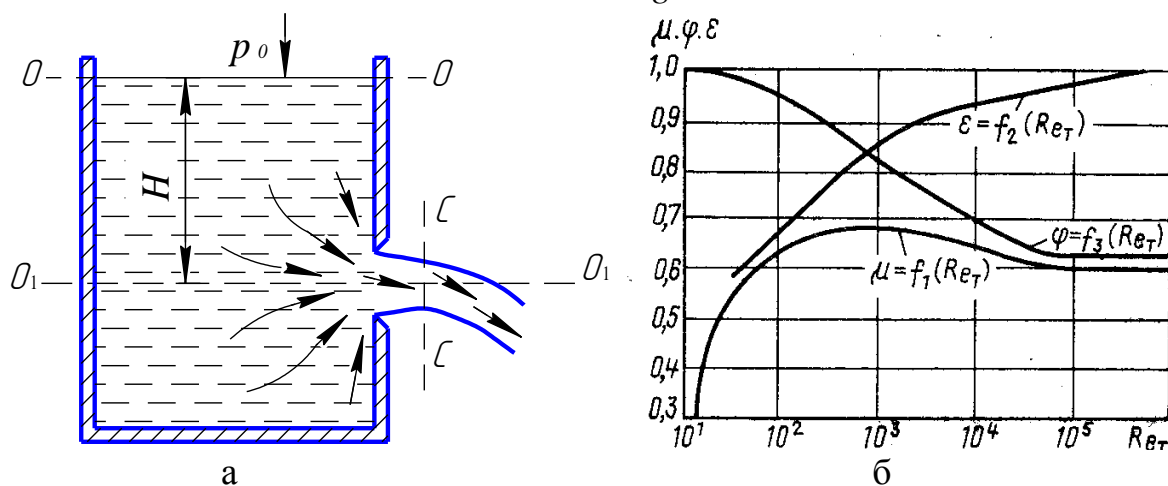


Рис. 60. Истечение жидкости при постоянном напоре

а — истечение жидкости через отверстие в тонкой стенке; б — зависимость коэффициентов расхода, скорости и сжатия от значения критерия Рейнольдса

Откуда скорость истечения в сжатом сечении:

$$v = \sqrt{\frac{2gH_0}{\alpha + \xi_{ex}}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \xi_{ex}}} \sqrt{2gH_0}; \quad (161)$$

обозначим

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha + \xi_{ex}}} = \varphi,$$

и окончательная формула для скорости истечения:

$$v = \varphi \sqrt{2gH_0}, \quad (162)$$

где φ – коэффициент скорости, $\varphi = 0,96...0,98$.

Расход жидкости:

$$Q = S_c v = \varepsilon \varphi S \sqrt{2gH_0}, \quad (163)$$

обозначим $\varepsilon \varphi = \mu$ и

$$Q = \mu S \sqrt{2gH_0}, \quad (164)$$

где μ – коэффициент расхода (для круглых отверстий в тонкой стенке $\mu = 0,62...0,6$).

Коэффициенты ε , ξ , φ , μ определяются опытным путем, их величина зависит от расположения отверстия относительно стенок сосуда, а также от числа Рейнольдса. На графике (рис. 60 б) А. Д. Альтшулем построены кривые для круглого отверстия $\mu = f_1(\text{Re}_T)$, $\varepsilon = f_2(\text{Re}_T)$; $\varphi = f_3(\text{Re}_T)$. Критерий Рейнольдса

$$\text{Re}_T = \frac{v_T d}{\nu} = \frac{\sqrt{2gH_0} d}{\nu}. \quad (165)$$

При истечении маловязких жидкостей (вода, бензин, керосин), которое осуществляется при $\text{Re} > 10^5$, коэффициенты ε , ξ , φ , μ изменяются в небольших пределах, поэтому при расчетах принимают: $\varepsilon = 0,64$, $\xi = 0,06$, $\varphi = 0,97$, $\mu = 0,62$.

2.14.2. Истечение жидкости через большие отверстия

При истечении жидкости через большое отверстие (рис. 61) скорость по сечению значительно меняется, поэтому расход можно получить суммированием элементарных расходов по живому сечению.

Выделим элементарную полоску dH . Расход через нее:

$$dQ = \mu dS \sqrt{2gH} = \mu b \sqrt{2gH} dH,$$

где $dS = b dH$.

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu b \sqrt{2gH} dH = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(H_2^{3/2} - H_1^{3/2} \right),$$

Выразим H_1 и H_2 через H_c и a ,

$$H_1 = H_c - \frac{a}{2} = H_c \left(1 - \frac{a}{2H_c} \right),$$

$$H_2 = H_c + \frac{a}{2} = H_c \left(1 + \frac{a}{2H_c} \right),$$

$$Q = \mu b a \sqrt{2gH_c}, \quad (166)$$

где H_c – глубина погружения центра тяжести струи, м;
 μ – коэффициент расхода для больших отверстий,
 a – высота отверстия, м.

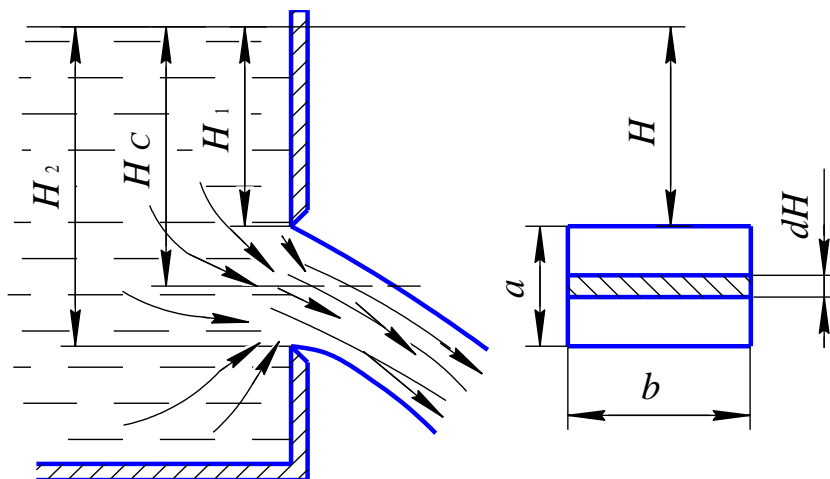


Рис. 61. Истечение через большое отверстие

Коэффициент расхода μ зависит от типа отверстий и условий подхода воды к отверстию (со всех сторон при отсутствии направляющих стенок, по дну со значительным влиянием бокового сжатия).

2.14.3. Истечение жидкости при переменном напоре

Величина напора и скорости соответственно меняются, мы имеем неустановившееся движение жидкости. Рассмотрим самый простой случай опорожнения или наполнения призматического резервуара (рис. 62). На дне резервуара имеется отверстие площадью ω , а площадь резервуара – S . Необходимо определить время уменьшения уровня от H_1 до H_2 . Очевидно, что за бесконечно малый промежуток времени dt и напор h можно считать постоянным. И количество жидкости, вытекающее через отверстие ω за dt будет

$$Qdt = \mu \omega \sqrt{2gh} dt.$$

За этот же отрезок времени уровень жидкости понизится на величину dh , а объем жидкости уменьшится на величину Sdh , следовательно:

$$Sdh = \mu \omega \sqrt{2gh} dt.$$

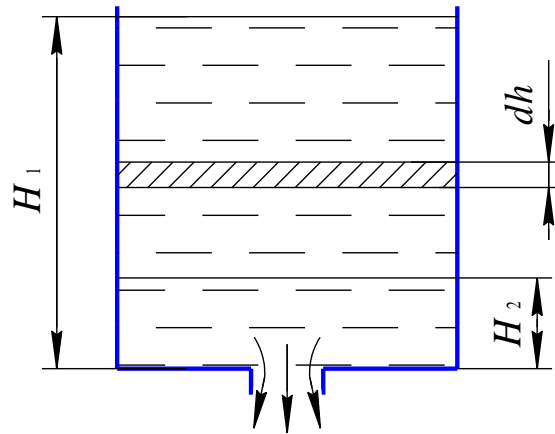


Рис. 62. Истечение жидкости при переменном напоре

Решая это уравнение относительно dt , имеем:

$$dt = - \int_{H_1}^{H_2} \frac{S dh}{\mu \omega \sqrt{2gh}} = - \frac{S}{\mu \omega \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}}, \quad (176)$$

интеграл

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}} = 2\sqrt{h}$$

и

$$t = \frac{2S\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}}{\mu \omega \sqrt{2g}}. \quad (167)$$

При полном опорожнении резервуара при $H_2 = 0$

$$t = \frac{2S\sqrt{H_1}}{\mu \omega \sqrt{2g}} \quad \text{или} \quad t = \frac{2SH_1}{\mu \omega \sqrt{2gH_1}}.$$

При постоянном напоре H_1 объем жидкости SH_1 будет вытекать за время

$$t = \frac{2SH_1}{\mu \omega \sqrt{2gH_1}}. \quad (168)$$

2.14.4. Истечение жидкости из насадков

Насадок – короткая труба (патрубок) длиной $\ll 4r \approx 4 \cdot \frac{d}{2}$, прикрепленная к отверстию.

Виды насадков: *цилиндрические* – внешний и внутренний; *конические* – сходящийся и расходящийся; *коноидальные*.

При входе жидкости в насадок (рис. 63) из-за изгиба линий тока происходит сжатие струи, образуется водоворотная зона, внутри которой создается вакуум; величина его зависит от скорости течения и от величины напора. Полный действующий напор как бы увеличивается за счет вакуума и складывается из напо-

ра над центром тяжести отверстия и величины вакуума в сжатом сечении (насадок Вентури).

Расход жидкости через насадок определяется:

$$Q = \mu S \sqrt{2gH_0}, \quad (169)$$

где μ – коэффициент расхода, причем ($\mu = \varepsilon\varphi$);

S – площадь выходного отверстия, м^2 ;

H_0 – полный напор, м.

$$H_0 = \frac{\alpha v_0^2}{2g} + H, \quad (170)$$

а скорость жидкости в выходном отверстии насадка:

$$v = \varphi \sqrt{2gH_0}.$$

За счет возникновения вакуума расход воды через насадок больше на 30 – 34 %, чем при истечении из отверстия при равных условиях.

Докажем: напишем уравнение Бернулли для сечений $0-0$ и $C-C$ (рис 63, б) приняв в сечении $0-0$ скорость течения v_0 равной нулю:

$$\frac{p_0}{\rho g} + H = \frac{v_c^2}{2g} + \frac{p_c}{\rho g} + \xi_{\text{ex}} \frac{v_c^2}{2g},$$

здесь p_0 , p_c – гидродинамическое давление в сечениях $0-0$ и $C-C$ перепишем уравнение (169) в виде:

$$\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = \frac{v_c^2}{2g} \left(+ \xi_{\text{ex}} \right) H.$$

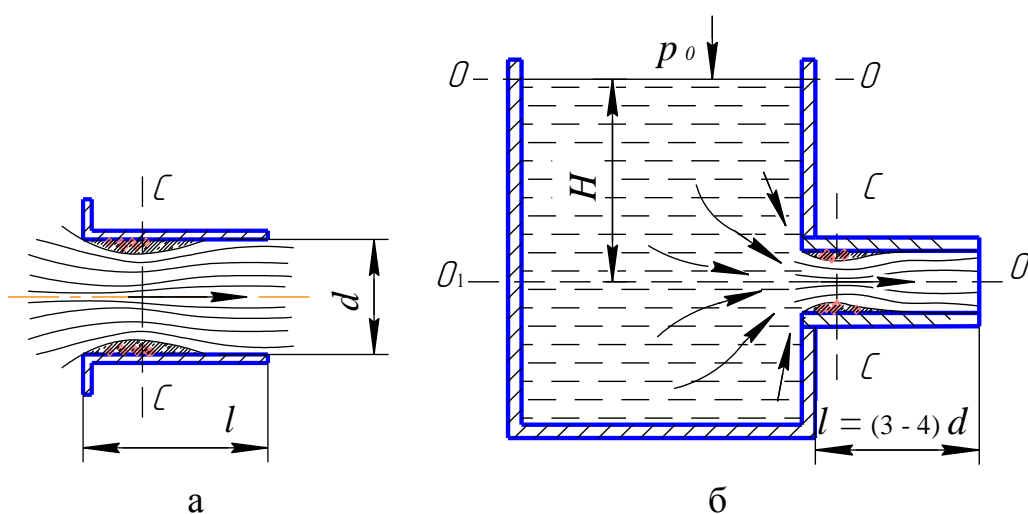


Рис. 63. Истечение жидкости из насадков

Так как

$$v_c = \frac{v}{\varepsilon},$$

где v – скорость течения в выходном отверстии, то

$$\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = \frac{v_c^2}{2g\varepsilon^2} \left(+ \xi_{\text{ex}} \right) = H, \quad (171)$$

принимая $p_0 = p_a$, а

$$\frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H,$$

подставив значение в (171), тогда:

$$\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = \frac{\varphi^2 H}{\varepsilon^2} \left(+ \xi_{\text{ex}} \right) = H = H \left[\frac{\varphi^2}{\varepsilon^2} \left(+ \xi_{\text{ex}} \right) - 1 \right].$$

Значения коэффициентов $\varepsilon = 0,64$, $\xi = 0,06$, $\varphi = 0,82$,

$$\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = H \left[\frac{0,82^2}{0,64^2} \left(+ 0,06 \right) - 1 \right] = 0,74H, \quad (172)$$

так как $\frac{p_0 - p_c}{\rho g} = h_{\text{вак}} = 0,74H$, т. е. в случае с наружным цилиндрическим насадком напор увеличивается на величину $0,26H$.

Цилиндрический внутренний насадок (рис. 64).

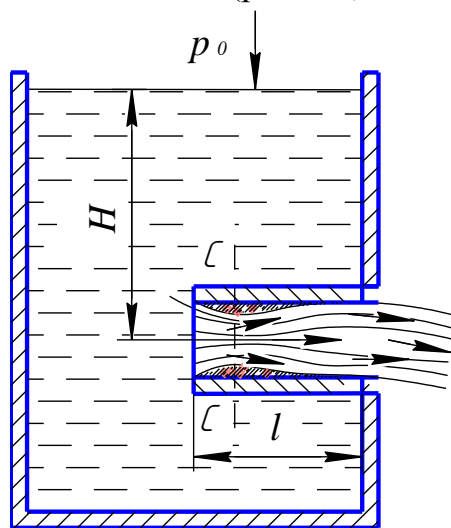


Рис. 64. Цилиндрический внутренний насадок

Физическая сущность явления истечения в этом насадке аналогична внешнему насадку. Но коэффициенты сжатия, скорости и расхода имеют следующие значения: $\varepsilon = 1$, $\mu = 0,71$, $\varphi = 0,71$, т. е. внутренний насадок имеет большее гидравлическое сопротивление и худшие гидравлические характеристики.

Конический сходящийся насадок (рис. 65).

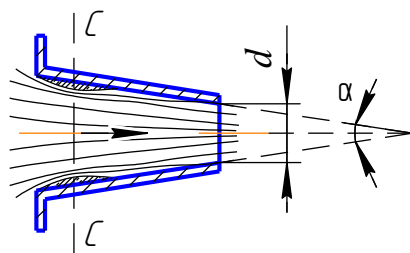


Рис. 65. Конический сходящийся насадок

Применяется в случаях, когда необходимо за счет увеличения скорости значительно увеличить давление струи (реактивные турбины, центробежные насосы). Скорость в сжатом сечении значительно больше, чем в выходном сечении $v > v_c$.

В *расходящемся коническом* насадке (рис. 66) сжатие струи и вакуум больше, чем в цилиндрическом. Угол в этом насадке допускается $5 - 7^\circ$. Потери энергии в коническом расходящемся насадке значительно больше потерь в других насадках, поэтому $\varepsilon \cong 1$.

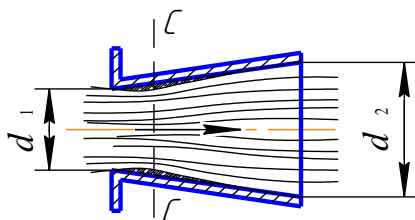


Рис. 66. Конический расходящийся насадок.

У *коноидального* насадка (рис. 67) сжатие струи при выходе из насадка не происходит и коэффициент сжатия $\varepsilon = 1$ насадок копирует форму струи, благодаря этому увеличивается коэффициент скорости и коэффициент расхода $\mu = \varphi = 0,97...0,99$. Широкого применения конический насадок не получил из-за высокой стоимости и точности изготовления.

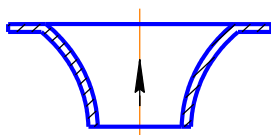


Рис. 67. Коноидальный насадок.

2.15. Гидравлические струи

Гидравлическая струя - конечный поток жидкости, не ограниченный твердыми стенками. Бывает затопленной и незатопленной.

Струя, вытекающая в однородную жидкость, называется *затопленной*; в атмосферу - *незатопленной* (брандспойт, для разработки грунта).

Незатопленная струя (рис. 68), вытекающая из насадка с цилиндрическим отверстием в атмосферу, имеет следующую структуру по длине: l_1 - компактная, l_2 - раздробленная, l_3 - распыленная часть струи.

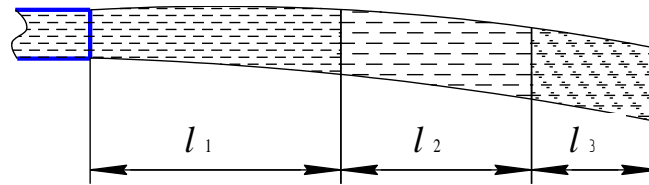


Рис. 68. Схема струи

В компактной части струи обеспечивается сплошность потока, струя имеет правильную цилиндрическую форму или близкую к ней. В раздробленной l_2 обнаруживается нарушение сплошности потока, струя разрывается на крупные части, поперечное сечение ее увеличивается и она расширяется по отношению к компактной части. Распыленная часть струи l_3 состоит из множества отдельных капель, в которые превращается весь поток.

При движении струи на нее действуют сила тяжести, силы сопротивления воздушной среды и внутренние силы, вызываемые турбулентным движением жидкости. В момент раздробления струи на мелкие капли начинают проявляться силы поверхностного натяжения.

В зависимости от назначения струи можно изменить и ее структуру. Для разработки грунтов, добычи угля, воздействия на лопатки активной гидравлической турбины требуется струя с хорошо развитой компактной частью l_1 , обладающая большой кинетической энергией. Для образования наиболее эффективной компактной части необходимо уменьшить турбулентность и устранить винтовое движение струи, выходящей из насадка, при помощи выправителей, размещаемых в сопле.

Для определения осевой скорости струи в пределах ее компактной части существует формула Н. П. Гавырина:

$$u = \frac{\varphi u_n d_n}{l} = \frac{145 u_n d_n}{l}, \quad (180)$$

где u_n – скорость струи при выходе из насадка, $\frac{м}{с}$;

d_n – диаметр струи при выходе из насадка, м;

$\varphi = 145$ – коэффициент.

Для вертикальных струй:

$$H_g = \frac{H}{1 + \psi H}, \quad (181)$$

где H_g – высота вертикальной струи, м;

H – напор, м;

ψ – коэффициент, $\psi = \frac{k}{d}$.

Коэффициент зависит k от диаметра насадка:

$$k = \frac{0,00025}{1 + 1000 \cdot d^2}, \quad (182)$$

где d – диаметр насадки, м.

Высота компактной струи H_k будет меньше общей высоты струи:

$$H_k = \beta \cdot H_e. \quad (183)$$

Величина β зависит от высоты струи H_e (табл. 6).

Таблица 6

H_e	7,0	9,5	12,0	14,5	17,2	20,0	22,9	24,5	26,8	30,5
β	0,84	0,84	0,835	0,825	0,815	0,805	0,79	0,785	0,76	0,725

Для определения дальности полета струи пользуются экспериментальной формулой Н. П. Гавырина

$$L = 0,415 \sqrt[3]{\alpha d_n H^2}, \quad (184)$$

где L – дальность полета, м;

α – угол вылета струи, град;

d_n – диаметр насадки, м;

H – напор, при выходе из насадки, м.

2.16. Расчет турбин

Рассмотрим воздействие гидравлической струи на неподвижную преграду (рис. 69). Предположим, что струя вытекает из сопла со средней скоростью и встречает на своем пути неподвижную вертикальную стенку.

Если вертикальная стенка плоская, то струя ударяясь о нее, растекается во все стороны. Для того чтобы струя растекалась при встрече лишь по двум направлениям, сделаем в вертикальной стене направляющий желоб, попав в который струя после удара разделится на верхнюю и нижнюю части.

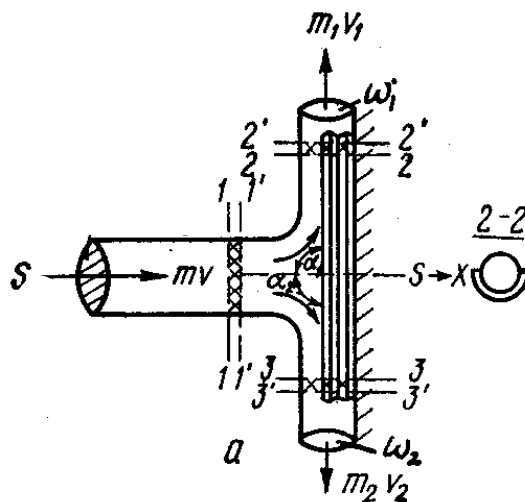


Рис. 69. Схема разделения струи.

Пусть струя имеет в сечении $1-1$ площадь живого сечения ω и среднюю скорость v . Расход $Q = \omega v$ до встречи со стенкой. При встрече со стенкой

струя разделится на две части: $\omega_1 v_1$ и $\omega_2 v_2$. Очевидно, что $\omega = \omega_1 + \omega_2$ принимаем $\omega_1 = \omega_2$ и $v_1 = v_2$. Выделим отсек струи 1–2–3. За время dt этот отсек переместится в новое положение 1'–2'–3'. Применим к движению отсека теорему количества движения, которая звучит: изменение проекции количества движения на заданную ось за время dt равно сумме проекций импульсов приложенных внешних сил на ту же ось за то же время. Примем за ось $S-S$. Тогда на основании этой теоремы:

$$m v - (m_1 v_1 \cos \alpha_1 + m_2 v_2 \cos \alpha_2) = -R dt,$$

где $m v$ – количество движения объема жидкости, заключенной между сечениями 1–1 и 1'–1';

$m_1 v_1 \cos \alpha_1$, $m_2 v_2 \cos \alpha_2$ – количество движения объемов жидкости, заключенных между сечениями 2–2; 2'–2'; 3'–3';

$R dt$ – импульс силы реакции стенки;

R – реакция неподвижной вертикальной стенки, (по третьему закону Ньютона, действие равно противодействию, следовательно $-R = P$).

Из рисунка видно, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$. И уравнение примет вид:

$$m v = P dt,$$

где $m = \rho dV$;

dV – элементарный объем между сечениями 1–1 и 1'–1', т.е. $dV = Q dt$,

$$\rho Q v dt = P dt,$$

откуда сила воздействия струи на вертикальную стенку будет:

$$P = \rho Q v = \rho \omega v^2. \quad (185)$$

Если стенка находится под некоторым углом к струе, то

$$P_N = \rho \omega v^2 \sin \alpha. \quad (186)$$

Мощность струи, действующей на подвижную преграду (лопатку турбины)

$$P = \rho Q (v - v_l)^2,$$

$$N = P v_l = \rho Q v_l (v - v_l)^2 = \rho Q v_l v^2 - \rho Q v_l v^2,$$

где v – скорость струи, $\frac{M}{c}$;

v_l – скорость лопатки, $\frac{M}{c}$.

Максимальное значение мощности можно получить при $v_l = \frac{v}{2}$:

$$N = \rho Q \frac{v}{2} \left(v - \frac{v}{2} \right)^2 = \rho \frac{Q v^2}{4} = \frac{m v^2}{4}. \quad (187)$$

Т. е. максимальная теоретическая мощность турбины с плоскими лопатками равна половине полной кинетической энергии струи. В действительности потери энергии составляют 40 – 45 %. Если применить криволинейные лопатки в виде ковшей, то при $\alpha_1 = \alpha_2 = 180^\circ$ и $v_n = \frac{v}{2}$ сила давления на полусферические поверхности равна

$$P = \rho Qv,$$

$$N = \rho \frac{Qv^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

2.17. Равномерное движение в открытых руслах

Равномерное движение потока жидкости – такое движение, при котором живые сечения, так же как, и скорость потока в соответственных точках этих сечений, одинаковы по всей длине рассматриваемого участка.

Типичным примером равномерного движения является движение в открытом канале или в цилиндрической трубе с одинаковыми по всей длине живыми сечениями.

Для равномерного движения расход определяется по формуле

$$Q = Sv = SC\sqrt{Ri}. \quad (188)$$

Скорость при равномерном движении выражается формулой

$$v = C\sqrt{Ri}, \quad (189)$$

где C – коэффициент, зависящий от шероховатости стенок и дна русла, а также от его формы и размеров;

R – гидравлический радиус, м,

$$R = \frac{S}{\chi};$$

S – площадь живого сечения, м²;

χ – смоченный периметр, м;

i – гидравлический уклон.

При гидравлическом расчете каналов вводится понятие расходной характеристики или модуля расход

$$K = SC\sqrt{R}. \quad (190)$$

Коэффициент C рекомендуется принимать по формуле академика Н. Н. Павловского

$$C = \frac{1}{n} R^y, \quad (191)$$

где n – коэффициент шероховатости, зависящий от материала и состояния русла;

y – показатель степени, зависящий от гидравлического радиуса R и коэффициента шероховатости n .

Гидравлические параметры каналов

Формы поперечного сечения каналов бывают трапецеидальные, прямоугольные, треугольные, параболические и др.

Для трапецеидального сечения русла (рис. 70):

- площадь живого сечения

$$S = (b + mh)h, \text{ м}^2; \quad (192)$$

- коэффициент заложения откоса

$$m = \text{ctg}\alpha, \quad (193)$$

где α – угол линии откоса с горизонталью;

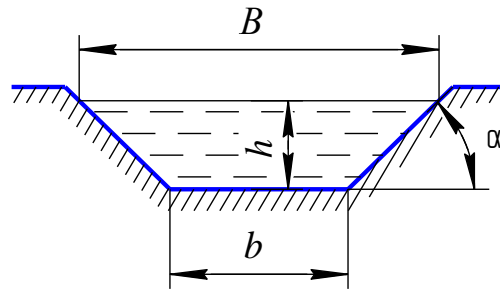


Рис. 70. Трапецеидальное сечение русла канала

- ширина живого сечения по верху

$$B = b + 2mh, \text{ м}; \quad (194)$$

- смоченный периметр

$$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2} = b + m'h, \text{ м}, \quad (195)$$

где

$$m' = 2\sqrt{1 + m^2}; \quad (196)$$

- гидравлический радиус

$$R = \frac{S}{\chi}, \text{ м}. \quad (197)$$

Для прямоугольного сечения русла (рис. 71):

- площадь живого сечения

$$S = bh, \text{ м}^2; \quad (198)$$

- смоченный периметр

$$\chi = b + 2h, \text{ м}; \quad (199)$$

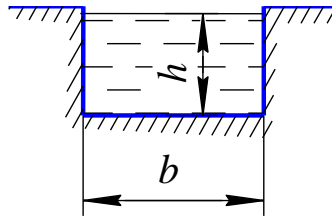


Рис. 71. Прямоугольное сечение русла канала

- гидравлический радиус

$$R = \frac{S}{\chi} = \frac{bh}{b+2h}, \text{ м.} \quad (200)$$

Для треугольного сечения русла (рис. 72):

$$S = mh^2, \text{ м}^2; \quad (201)$$

- смоченный периметр

$$\chi = m'h, \text{ м}; \quad (202)$$

- гидравлический радиус

$$R = \frac{m}{m'}h, \text{ м} \quad (203)$$

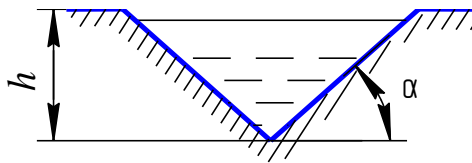


Рис. 72. Треугольное сечение русла канала

Для параболического сечения русла (рис. 73):

- площадь живого сечения

$$S = \frac{2}{3}hB, \text{ м}^2; \quad (204)$$

ширина по верху

$$B = 2\sqrt{2ph}, \text{ м}, \quad (205)$$

где $2p$ – параметр параболы.

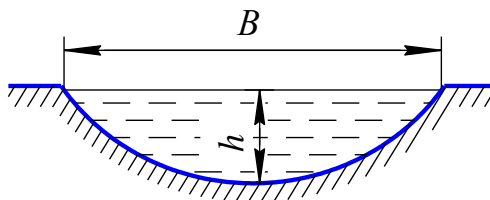


Рис. 73. Параболическое сечение русла канала

В табл. 7 приведены значения коэффициенты заложения откосов m .

Таблица 7

Наименование грунтов, слагающих русло канала	Коэффициент заложения откосов, m	
	подводных	надводных
Пески пылеватые	3 – 3,5	2,5
Пески мелкие, средние и крупные:		
- рыхлые и средней плотности	2 – 2,5	2
- плотные	1,5 – 2	1,5
Супеси	1,5 – 2	1,5
Суглинки, лессы и глины:		
- легкие и средние суглинки и лессы	1,25 – 1,5	1 – 0,5
- тяжелые суглинки и плотные глины	1 – 1,25	1 – 0,5
Гравийные и галечниковые:		
- рыхлые и средней плотности	1,25 – 1,5	1
- плотные	1,25	1
Полускальные водостойкие	0,5 – 1	0,5
Скала:		
- выветрившаяся	0,25 – 0,5	0,25

2.18. Водосливы. Классификация водосливов

Гидравлическое явление перелива потока жидкости через стенку или порог называют *водосливом*. Водосливом также называют стенку или порог, стоящие на пути движения потока жидкости.

Теория водослива положена в основу теории расчета плотин, в том числе лесосплавных плотин, водопусков, подмостовых отверстий, малых гидросооружений для пропуска воды в дорожном полотне, в земляных дамбах. Кроме того, водослив может служить точным прибором для измерения скоростей и расходов.

Акваторию потока, расположенную выше водослива, называют верхним бьефом, ниже водослива - нижним бьефом.

Водосливы по своему назначению можно подразделить на водосливы, которые предназначаются для поддержания горизонтов воды в водохранилищах и сброса расходов воды (например, водосливы с широким порогом или практического профиля), и на водосливы мерные, служащие для замера расхода жидкости (например, с трапецеидальным или треугольным отверстием). Водосливы также подразделяются:

- по типу стенки (порога) – на водосливы с тонкой стенкой, практического профиля и с широким порогом;
- по форме отверстия в стенке – на прямоугольные, треугольные, трапецеидальные, параболические и др.;
- по типу сопряжения переливающейся струи с потоком нижнего бьефа – на незатопленные и затопленные; горизонт воды в нижнем бьефе в первом слу-

чае не оказывает влияния на истечение, во втором – влияет на истечение воды через водослив;

- по очертанию в плане – на прямые, косые, криволинейные, ломанные, кольцевые и боковые.

Расход воды через водослив определяется по формулам

$$Q = mb\sqrt{2g}H_0^{3/2} \quad (206)$$

$$Q = m_0b\sqrt{2g}H^{3/2}, \quad (207)$$

где m – безразмерный коэффициент расхода;

m_0 – то же, с учетом скорости подхода;

b – ширина водослива, м;

H – напор на гребне водослива, м,

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g};$$

v_0 – скорость подхода, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Коэффициент расхода не является величиной постоянной и зависит от типа водослива, напора, скорости подхода, наличия бокового сжатия, подтопления и других условий.

Значения коэффициентов m для неподтопленных водосливов при ориентировочных расчетах рекомендуется принимать следующие:

- с тонкой стенкой 0,42;
- без вакуумного практического профиля 0,45;
- вакуумного 0,5;
- с широким порогом 0,32 – 0,35.

Коэффициент расхода через незатопленный водослив с тонкой стенкой без бокового сжатия струи (рис. 74, а) определяется по формуле

$$m = 0,405 + \frac{0,0027}{H}; \quad (208)$$

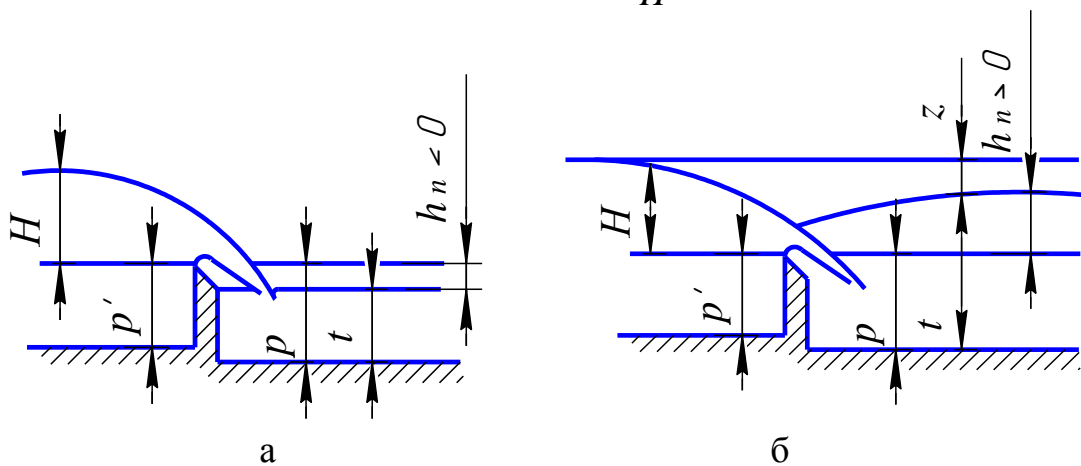


Рис. 74. Водослив с тонкой стенкой

При условии $H \geq 0,1$ и $H \leq 2p$

$$m = 0,402 + 0,0504 \frac{H}{p'}, \quad (209)$$

где H – напор, м ;

p' – высота стенки со стороны верхнего бьефа, м .

Водослив становится затопленным при выполнении следующих условий:

- уровень нижнего бьефа должен быть расположен выше порога водослива;
- сопряжение падающей с водослива струи с нижним бьефом должно происходить при затопленном прыжке.

Для затопленного водослива с тонкой стенкой расход определяется по формуле

$$Q = \sigma_3 m_0 b \sqrt{2g} H^{3/2}, \quad (210)$$

где σ_3 – коэффициент затопления.

Водослив с широким порогом (рис. 75) является наиболее распространенным типом водосбросного сооружения и представляет собой порог с горизонтальной сливной плоскостью длиной $L > \dots 3 H$ и с произвольно очерченными верхней и нижней гранями.

Расход воды через водослив с широким порогом определяется по формуле

$$Q = K \sigma_3 m_{nl} b \sqrt{2g} H_0^{3/2}, \quad (211)$$

где K – коэффициент, учитывающий сжатие потока;

σ_3 – коэффициент затопления;

m_{nl} – коэффициент расхода водослива в условиях плоской задачи;

b – длина гребня водослива, м;

H_0 – напор с учетом скорости подхода, м.

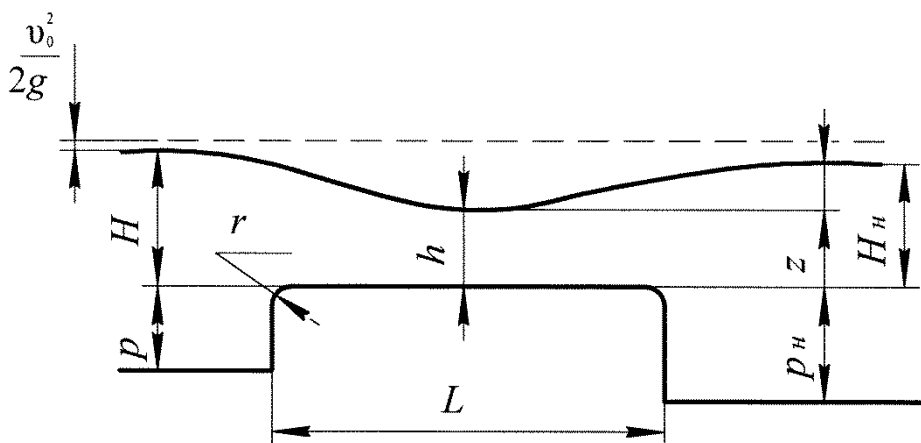


Рис. 75. Водослив с широким порогом

Водосливы практических профилей бывают безвакуумные и вакуумные, а по своему очертанию – криволинейные, прямоугольные, трапециевидальные и полигональные. При проектировании ответственных сооружений коэффициент расхода водослива определяется на основании лабораторных гидравлических исследований.

2.19. Гидравлический расчет отверстий малых мостов и водопропускных дорожных сооружений

Для пропуска талых и ливневых вод в насыпи железных и шоссейных дорог устраивают водопропускные сооружения. Эти сооружения имеют отверстия, обеспечивающие пропуск паводковых вод без перелива через насыпь. К этим сооружениям относят: трубы разных форм поперечного сечения, фильтрующие дамбы в насыпи и мосты.

Мосты и трубы длиной до 20 м называют малыми искусственными сооружениями. Для гидравлического расчета отверстий малых мостов прямоугольной формы поперечного сечения необходимо иметь следующие исходные данные:

Q – расчетный расход, который необходимо пропустить через отверстие;

h_0 – бытовую глубину в русле при пропуске до сооружения моста;

φ – тип укрепления подмостового русла, (в случае если укрепление не требуется, то вид грунтов подмостового русла).

Обычно расчет начинают с установления критической глубины. Известно, что критическая глубина (возможно, самая нижняя часть отверстия) определяется из выражения:

$$h_k = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}, \quad (212)$$

где $q = \frac{Q_p}{b}$ – единичный расход, приходящийся на 1 пог. м ширины водослива, $\frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{м}}$;

Q_p – расчетный расход, $\frac{\text{м}^3}{\text{с}}$.

Для прямоугольного отверстия

$$q = \frac{Q_p}{b} = \frac{bhv}{b} = h_k v, \quad (213)$$

где v – средняя скорость потока, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Глубина подпертого уровня воды перед мостом H :

$$H = \left(1 + \frac{1}{2\varphi^2}\right) h_k - \frac{v_0^2}{2g}, \quad (214)$$

где φ – коэффициент скорости,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{ex}}}; \quad (215)$$

ξ_{ex} – коэффициент сопротивления при входе воды в сооружения (табл. 8)

Таблица 8

Вид объекта	φ	ξ_{ax}
Трубы без оголовков и мосты без конусов	0,83	0,45
Трубы с оголовками и расходящимися откосными крыльями	0,89	0,25
Трубы с конусообразными оголовками	0,95	0,1
Малые мосты с конусами	0,93	0,15

Ширина отверстия моста:

$$b = \frac{gQ_p}{\varepsilon v_0^3},$$

где Q_p – расчетный расход, $\frac{м^3}{с}$.

g – ускорение свободного течения, $\frac{м}{с^2}$;

v_0 – допустимая скорость течения, $\frac{м}{с}$;

ε – коэффициент сжатия потока, в табл. 9 приведены значения коэффициента сжатия потока.

Таблица 9

Вид объекта	ε
Мосты с конусами и трубы (независимо от очертания) с расходящимися откосными крыльями	0,9
Мосты без конусов и трубы (независимо от их очертания) без расходящихся откосных крыльев, а трубы, срезанные в плоскости откоса насыпи	0,8
Трубы с выпущенными из тела насыпи концами, а также арочные мосты с затопленными пятнами	0,75

Подсчитанные величины b округляют до стандартных b' значений (в большую сторону) и проводят уточняющий расчет скорости течения:

$$v' = v_0 \sqrt[3]{\frac{b}{b'}}.$$

Затем уточняют критическую глубину

$$h'_k = \frac{v'^2}{g}.$$

Напор перед мостом

$$H_0 = \left(1 + \frac{1}{2\varphi^2}\right) h'_k - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Если $v_0 < 0,5 \frac{M}{c}$, то $H_0 = H$.

Гидравлический радиус потока в подмостовом русле

$$R' = \frac{b'h'_k}{b' + 2h'_k}.$$

Гидравлический уклон

$$i = \frac{v'^2}{C'^2 R'}.$$

2.20. Гидравлический расчет открытых русел

Для определения средней скорости равномерного течения потока используют формулу Шези:

$$v = C\sqrt{Ri},$$

а для определения коэффициента C – скоростной множитель определяют по формуле Павловского или Базена:

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad \text{или} \quad C = \frac{87}{1 + \frac{n_6}{\sqrt{R}}};$$

где n_6 – коэффициент шероховатости дна и стенок русла;

R – гидравлический радиус, м;

y – показатель степени ($y = 1,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R} \sqrt{n} - 0,10$).

Расход жидкости:

$$Q = Sv = SC\sqrt{Ri}.$$

Потери напора:

$$h_w = \frac{v^2 l}{C^2 R}.$$

Гидравлический уклон:

$$i = \frac{v^2}{C^2 R}.$$

Расходная характеристика:

$$K = \frac{Q}{\sqrt{i}} = \omega C\sqrt{R}.$$

Наиболее распространенными являются каналы трапецеидальной сечения, гидравлический радиус этого сечения $R = \frac{h}{2}$ – половина глубины его заполнения. При

расчете канала необходимо знать и минимальную скорость, которая обеспечивает канал от заливания

$$v_{\min} = \alpha R^{0,5},$$

где α – коэффициент от $0,41 \div 0,77$ в зависимости от вида песчаного насоса.

2.21. Основы теории гидравлического моделирования

2.21.1. Виды подобия. Второй закон Ньютона

При изучении гидравлических явлений прибегают к изучению их на моделях. В основе моделирования гидравлических явлений лежат законы подобия. Их три вида: геометрическое, кинематическое, динамическое (механическое).

Геометрическое подобие – это подобие форм двух тел или объектов, для обеспечения которого необходимо, чтобы отношения между всеми линейными размерами модели и в натуре были одинаковыми.

Кинематическое подобие – это подобие движения. Кинематическое подобие обеспечивается при равенстве отношений скоростей всех соответствующих частиц жидкости на модели и в натуре при соблюдении геометрического подобия траекторий движения на обоих объектах.

Динамическое, или механическое, подобие – это подобие масс и сил. Для обеспечения динамического подобия необходимо добиться равенства отношений между силами, приложенными к соответствующим частицам жидкости на модели и в натуре.

Общая теория подобия базируется на втором законе Ньютона (законе движения). Для того, чтобы на модели сообщить частице жидкости массой m_m ускорение a_m , к ней необходимо приложить силу

$$F_m = m_m a_m. \quad (216)$$

Зная, что масса равна произведению плотности на объем, можно записать

$$m_m = \rho_m V_m = \rho_m K L_m^3, \quad (217)$$

где L_m – один из характерных размеров модели;

K – коэффициент пропорциональности, зависящий от геометрической формы рассматриваемой частицы жидкости.

Ускорение:

$$a_m = \frac{v_m}{T_m} = \frac{L_m / T_m}{T_m} = \frac{L_m}{T_m^2}, \quad (218)$$

где v_m – скорость частиц жидкости на модели;

T_m – отрезок времени, за который частица жидкости приобрела ускорение a_m .

Подставив все это в (216), получим

$$F_M = K\rho_M L_M^3 \frac{L_M}{T_M^2} = K\rho_M L_M^2 v_M^2. \quad (219)$$

Аналогичное выражение для силы F_H , приложенной к частице жидкости в натуре, будет иметь вид:

$$F_H = K\rho_H L_H^2 v_H^2. \quad (220)$$

Отношение сил :

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{K\rho_H L_H^2 v_H^2}{K\rho_M L_M^2 v_M^2} = Ne - const. \quad (221)$$

Это закон подобия Ньютона, формулируется так:

В механически подобных процессах соотношение между двумя соответствующими силами, действующими в натуре и на модели, равно постоянному числу Ne, называемому числом Ньютона.

Но движущаяся жидкость находится под воздействием различных сил, отличающихся друг от друга своей физической сущностью. Когда на жидкость действуют силы различной физической природы (и трения, и поверхностное натяжение), не удастся добиться равенства числа Ne для всех сил. Поэтому при моделировании стремятся выделить главную силу, определяющую характер движения в качественном и количественном отношениях.

В инженерной практике чаще всего приходится встречаться с гидравлическими явлениями, основную роль в которых играют силы тяжести или силы внутреннего трения жидкости. Существует два основных закона гидравлического моделирования: Фруда и Рейнольдса.

2.21.2. Закон Фруда

На законе Фруда основано моделирование гидравлических явлений, преобладающее значение в которых имеют силы тяжести, например при изучении движения жидкости в открытых руслах, истечении жидкости через большие отверстия и водосливы. Эти силы, приложенные к модели и в натуре, можно выразить так

$$F_H = g_H \rho_H K L_H^3 \quad \text{и} \quad F_M = g_M \rho_M K L_M^3 \quad (222)$$

отношение сил:

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{g_H \rho_H K L_H^3}{g_M \rho_M K L_M^3}. \quad (223)$$

Приравняв правые части (221) и (223) имеем:

$$\frac{\rho_n L_n^2 v_n^2}{\rho_m L_m^2 v_m^2} = \frac{g_n \rho_n L_n^3}{g_m \rho_m L_m^3}.$$

Учитывая, что $\rho_n = \rho_m$, запишем:

$$\frac{v_n^2}{v_m^2} = \frac{g_n L_n}{g_m L_m}; \text{ или } \frac{v_n^2}{g_n L_n} = \frac{v_m^2}{g_m h_m} = \frac{v^2}{gL} = Fr. \quad (224)$$

Это закон Фруда: в механически подобных процессах, протекающих под влиянием силы тяжести, должны быть одинаковы числа Фруда.

$$Fr = \frac{v^2}{gL}.$$

Число Фруда Fr – величина, пропорциональная отношению сил инерции к силам тяжести.

Для проектирования явлений на моделях необходимо иметь масштабные зависимости, устанавливающие связь между различными геометрическими, кинематическими и динамическими характеристиками натурального и модельного потока жидкости:

- масштаб длин

$$\lambda_L = \frac{L_n}{L_m}; \quad (225)$$

- масштаб площадей

$$\lambda_\omega = \frac{S_n}{S_m} = \frac{KL_n^2}{KL_m^2} = \lambda_L^2; \quad (226)$$

- масштаб объемов

$$\lambda_w = \frac{V_n}{V_m} = \frac{KL_n^3}{KL_m^3} = \lambda_L^3; \quad (227)$$

- масштаб уклонов

$$\lambda_i = \frac{i_n}{i_m} = 1 \text{ (одинаковы);} \quad (228)$$

- масштаб времени

$$\lambda_T = \frac{T_n}{T_m} = \frac{L_m/T_m}{L_n/T_n} \frac{L_n}{L_m} = \frac{v_m L_n}{v_n L_m} = \frac{1}{\lambda^{1/2}} \lambda_L = \lambda_L^2; \quad (229)$$

- масштаб расходов

$$\lambda_Q = \frac{Q_n}{Q_m} = \frac{v_n S_n}{v_m S_m} = \lambda_L^{1/2} \lambda_L^2 = \lambda_L^{5/2}; \quad (230)$$

- масштаб сил

$$\lambda_F = \frac{F_H}{F_M} = \frac{\rho_H g_H K L_H^3}{\rho_M g_M K L_M^3} = \lambda_\rho \lambda_L^3; \quad (231)$$

- масштаб давлений

$$\lambda_P = \frac{p_H}{p_M} = \frac{F_H / S_H}{F_M / S_M} = \frac{F_H S_M}{F_M S_H} = \lambda_{\rho g} \lambda_L^3 \frac{1}{\lambda_L^2} = \lambda_{\rho g} \lambda_L, \quad (232)$$

где $\lambda_{\rho g}$ – масштаб объемного веса.

2.21.3. Закон Рейнольдса

На законе Рейнольдса основано моделирование явлений, основную роль в которых играют силы внутреннего трения жидкости.

Силы внутреннего трения, приложенные к соответствующим площадям на модели и в натуре, можно выразить

$$F_H = \mu_H S_H \frac{d\upsilon_H}{dh_H} \quad \text{и} \quad F_M = \mu_M S_M \frac{d\upsilon_M}{dh_M}, \quad (233)$$

где dh – текущий размер.

Отношение сил:

$$\frac{F_H}{F_M} = \frac{\mu_H S_H \frac{d\upsilon_H}{dh_H}}{\mu_M S_M \frac{d\upsilon_M}{dh_M}} = \frac{\mu_H L_H^2 \frac{\upsilon_H}{L_H}}{\mu_M L_M^2 \frac{\upsilon_M}{L_M}}, \quad (234)$$

где μ_H , и μ_M – динамические коэффициенты вязкости.

Приравняв число Ne (Ньютона) и (234), будем иметь:

$$\frac{\rho_H L_H^2 \upsilon_H^2}{\rho_M L_M^2 \upsilon_M^2} = Ne = \frac{\mu_H L_H \upsilon_H}{\mu_M L_M \upsilon_M}. \quad (235)$$

Зная, что $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, после сокращения получим

$$\frac{L_H \upsilon_H}{L_M \upsilon_M} = \frac{\upsilon_H}{\upsilon_M} \quad \text{или} \quad Re = \frac{L_H \upsilon_H}{\nu_H} = \frac{L_M \upsilon_M}{\nu_M}. \quad (236)$$

Это закон Рейнольдса: в механически подобных процессах, протекающих под влиянием внутренних сил трения жидкости, должны быть одинаковы числа Рейнольдса $Re = \frac{L\upsilon}{\nu}$, вычисленные для соответствующих элементов природы и модели.

Масштабы геометрических характеристик при моделировании по закону Рейнольдса принимаются такими же, как и при моделировании по Фрудру:

- масштаб скоростей

$$\lambda_v = \frac{v_H}{v_M} = \frac{L_H v_H}{L_H v_M} = \lambda_L^{-1} \lambda_v, \quad (237)$$

где λ_v – масштаб кинематической вязкости;

- масштаб расходов

$$\lambda_Q = \frac{Q_H}{Q_M} = \frac{v_H \omega_H}{v_M \omega_M} = \lambda_L^{-1} \lambda_v \lambda_L^2 = \lambda_L \lambda_v; \quad (238)$$

- масштаб сил

$$\lambda_F = \lambda_v^2 \lambda_\rho; \quad (239)$$

- масштаб давлений

$$\lambda_p = \lambda_v^2 \lambda_\rho \lambda_L^2. \quad (240)$$

Примеры решения задач к темам главы 2:

Задача 1. На оси водопроводной трубы установлена трубка Пито с дифференциальным ртутным манометром (рис. 76). Определить максимальную скорость движения воды в трубе, если разность уровней ртути в манометре $\Delta h = 18$ мм.

Решение.

Трубка Пито измеряет скоростной напор (тарировочный коэффициент равен единице)

$$H = \frac{u_{\max}^2}{2g}.$$

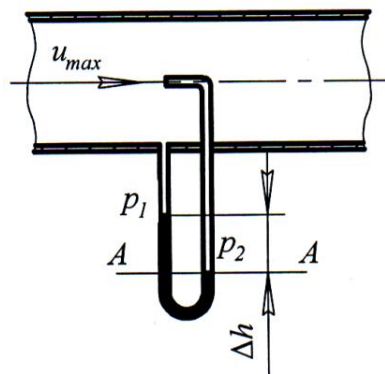


Рис. 76. К задаче 1

Для определения скоростного напора запишем уравнение равновесия в ртутном манометре относительно плоскости $A - A$:

$$p_1 + \Delta h \rho_{pm} g = p_2 + \Delta h \rho g,$$

где p_1 и p_2 – давление в трубках ртутного манометра на уровне верхней отметки ртути, Па;

ρ и $\rho_{рт}$ – плотности воды $\rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и ртути $\rho_{рт} = 13600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Тогда скоростной напор

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \Delta h \left(\frac{\rho_{рт}}{\rho} - 1 \right),$$

$$H = 0,018 \cdot \left(\frac{13600}{1000} - 1 \right) = 0,227 \text{ м.}$$

Максимальная скорость в трубе

$$u_{\max} = \sqrt{2gH},$$

$$u_{\max} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,227} = 2,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Задача 2. Определить пределы изменения гидравлического радиуса для канализационных самотечных трубопроводов, если диаметр их d изменяется от 150 до 3500 мм. Расчетное (наибольшее) наполнение: $a = \frac{h}{d} = 0,6$ для труб

$d = 150$ мм; $a = \frac{h}{d} = 0,8$ для труб $d = 3500$ мм (рис. 77).

Решение.

Гидравлический радиус по формуле:

$$R = \frac{S}{\chi},$$

где S – площадь живого сечения, м^2

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2} \left(h - \frac{d}{2} \right) \cdot 2 \sqrt{\left(\frac{d}{2} \right)^2 - \left(h - \frac{d}{2} \right)^2},$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\varphi}{2\pi} + d^2 \left(a - 0,5 \right) \cdot 2 \sqrt{a^2 - a^2};$$

χ – смоченный периметр, м^2 ,

$$\chi = \pi d \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Угол 2α находим из соотношения:

$$\sin \alpha = \frac{h - \frac{d}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{ad - 0,5d}{0,5d} = \frac{a}{0,5} - 1;$$

$$\varphi = \pi + 2\alpha.$$

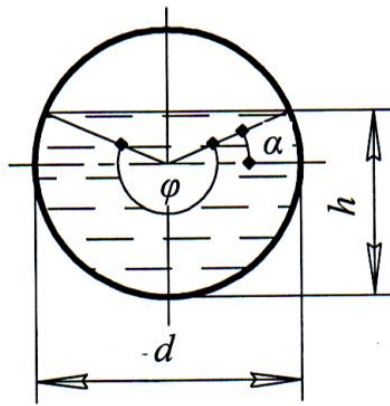


Рис. 77. К задаче 2

Для трубы диаметром $d = 150$ мм

$$\sin \alpha = \frac{0,6}{0,5} - 1 = 0,2; \quad \alpha = 0,2 \text{ рад};$$

$$\varphi = 3,14 + 2 \cdot 0,2 = 3,54 \text{ рад};$$

$$S = \frac{3,14 \cdot 0,15^2}{4} \cdot \frac{3,54}{2 \cdot 3,14} + 0,15^2 \cdot (0,6 - 0,5) \cdot 2 \cdot \sqrt{0,6 \cdot (0,6 - 0,5)} = 0,0111 \text{ м}^2;$$

$$\chi = 3,14 \cdot 0,15 \cdot \frac{3,54}{2 \cdot 3,14} = 0,266 \text{ м};$$

$$R = \frac{0,0111}{0,266} = 0,0417 \text{ м}.$$

Для трубы диаметром $d = 3500$ мм

$$\sin \alpha = \frac{0,8}{0,5} - 1 = 0,6; \quad \alpha = 0,63 \text{ рад};$$

$$\varphi = 3,14 + 2 \cdot 0,63 = 4,4 \text{ рад};$$

$$S = \frac{3,14 \cdot 3,5^2}{4} \cdot \frac{4,4}{2 \cdot 3,14} + 3,5^2 \cdot (0,8 - 0,5) \cdot 2 \cdot \sqrt{0,8 \cdot (0,8 - 0,5)} = 8,22 \text{ м}^2;$$

$$\chi = 3,14 \cdot 3,5 \cdot \frac{4,4}{2 \cdot 3,14} = 7,7 \text{ м};$$

$$R = \frac{8,22}{7,7} = 1,07 \text{ м}.$$

Задача 3. Вода протекает по горизонтальной трубе, внезапно сужающейся от $d_1 = 200$ мм до $d_2 = 100$ мм (рис. 78). Расход воды $Q = 0,02 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$. Определить

какую разность уровней ртути h_{pm} покажет дифференциальный манометр, включенный в месте изменения сечения. Температура воды 20°C .

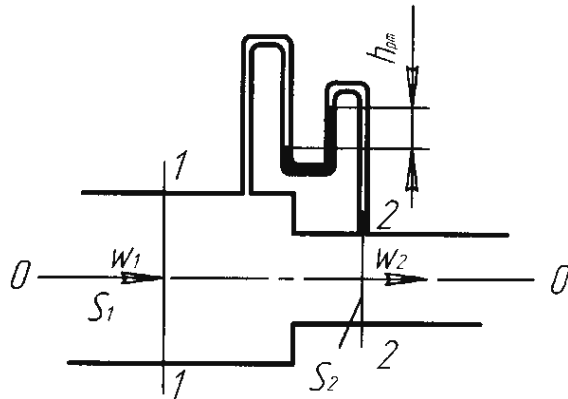


Рис. 78. К задаче 3

Решение.

Скорость воды в широком сечении трубы:

$$v_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_1^2},$$

$$v_1 = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,2^2} = 0,69 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость воды в узком сечении трубы:

$$v_2 = \frac{4 \cdot V}{\pi \cdot d_2^2},$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot 0,02}{3,14 \cdot 0,1^2} = 2,82 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Степень сужения трубопровода:

$$n = \frac{S_2}{S_1} = \frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{0,1^2}{0,2^2} = 0,25.$$

Коэффициент сжатия струи:

$$\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - n},$$

$$\varepsilon = 0,57 + \frac{0,043}{1,1 - 0,25} = 0,62.$$

Коэффициент местного сопротивления при внезапном сужении:

$$\xi_{\text{вн.с.}} = \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2;$$

$$\xi_{\text{вн.с.}} = \left(\frac{1}{0,62} - 1 \right)^2 = 0,37.$$

Уравнение Бернулли для сечений 1 – 1 и 2 – 2 и плоскости сравнения, совпадающей с осью трубы:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{w_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{w_2^2}{2 \cdot g} + \xi_{\text{вн.с.}} \cdot \frac{w_2^2}{2 \cdot g}.$$

Разность пьезометрических напоров

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{w_2^2}{2 \cdot g} - \frac{w_1^2}{2 \cdot g} + \xi_{\text{вн.с.}} \cdot \frac{w_2^2}{2 \cdot g};$$

$$H = \frac{2,82^2}{2 \cdot 9,8} - \frac{0,69^2}{2 \cdot 9,8} + 0,37 \cdot \frac{2,82^2}{2 \cdot 9,8} = 0,529 \text{ м}$$

Величина столба ртутного манометра:

$$h_{\text{рт}} = \frac{H \cdot \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}};$$

$$h_{\text{рт}} = \frac{0,529 \cdot 998}{13550 - 998} = 42,5 \text{ мм рт. ст.}$$

Задача 4. Насос забирает из водоема воду с температурой 20°C в количестве $Q = 50 \frac{\text{л}}{\text{с}}$. Определить максимальную высоту расположения горизонтального вала насоса над свободной поверхностью воды H (рис. 79), если давление перед насосом $p_2 = 0,3 \cdot 10^5$ Па. На всасывающей чугунной трубе диаметром $d = 250$ мм и длиной $l = 50$ м имеется заборная сетка, плавный поворот радиусом $R = 0,5$ м и регулирующая задвижка (вентиль), открытая на 45 % площади проходного сечения.

Решение.

Запишем уравнение Бернулли для двух сечений 1-1 (по уровню свободной поверхности водоема) и 2-2 (перед насосом), относительно плоскости сравнения 0–0 совпадающей с сечением 1–1:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2 \cdot g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2 \cdot g} + h_{\text{от}1-2}$$

сечение 1 – 1: $p_1 = p_{\text{атм}}$; $Z_1 = 0$; $v_1 \approx 0$;

сечение 2 – 2: $p_2 = 0,3 \cdot 10^5$; $Z_2 = H$.

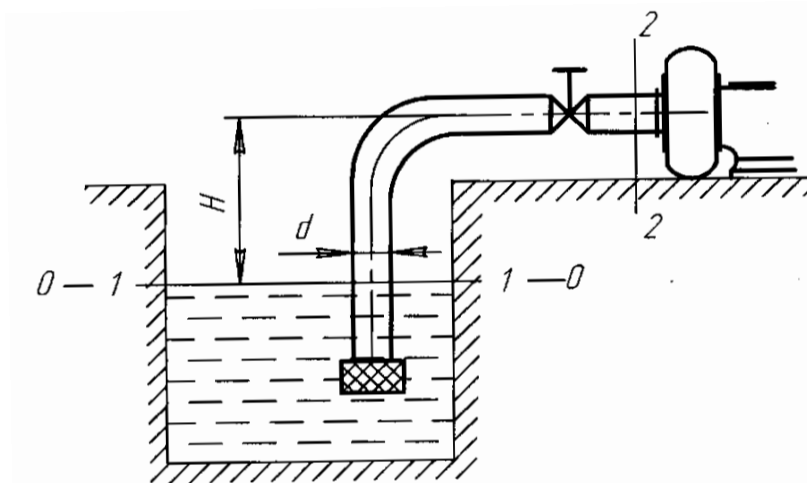


Рис. 79. К задаче 4

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{\alpha_2 v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + H_1 + h_{w1-2}.$$

Высота расположения насоса над уровнем воды в водоеме:

$$H = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2 \cdot g} - h_{w1-2}.$$

Средняя скорость течения воды во всасывающей трубе:

$$v_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2},$$

$$v_2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{3,14 \cdot 0,25} = 1,02 \frac{м}{с}.$$

Режим движения воды по трубопроводу определяем по значению критерия Рейнольдса:

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\mu},$$

где ρ – плотность воды при $t = 20^{\circ}C$ (см. приложение 2), $\rho_{20} = 998 \frac{кг}{м^3}$,

μ – коэффициент динамической вязкости воды при $t = 20^{\circ}C$

$\mu_{20} = 1004 \cdot 10^{-6} Па \cdot с$ (см. приложение 2).

$$Re = \frac{1,02 \cdot 0,25 \cdot 998}{1004 \cdot 10^{-6}} = 253476.$$

Следовательно, режим движения воды турбулентный, тогда коэффициент Кориолиса $\alpha_2 = 1$.

Суммарные потери давления:

$$h_{w1-2} = \lambda \cdot \frac{l}{d} \frac{v^2}{2 \cdot g} + \sum \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{l}{d} + \sum \xi \right),$$

где $\sum \xi = \xi_{заб} + \xi_{пов} + \xi_{в}$ – сумма коэффициентов местных сопротивлений;

$\xi_{заб}$ – коэффициент местного сопротивления на вход во всасывающую трубу, $\xi_{заб} = 5$ (см. приложение 12);

$\xi_{пов}$ – коэффициент местного сопротивления на плавный поворот трубопровода;

$\xi_{в}$ – коэффициент местного сопротивления задвижки (вентиля), $\xi_{в} = 5$ (см. приложение 12).

Для чугунных труб $\Delta_{экс} = 1$ мм (см. приложение 14).

Коэффициент гидравлического трения при турбулентном режиме движения

$$\lambda = 0,11 \cdot \left[\frac{\Delta_{экс}}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right]^{0,25},$$

$$\lambda = 0,11 \cdot \left[\frac{1}{250} + \frac{68}{253476} \right]^{0,25} = 0,028.$$

Коэффициент местного сопротивления на плавный поворот $\xi_{пов}$ может быть определен по формуле

$$\xi_{пов} = \left(2 + 0,001 \cdot \left(100 \cdot \lambda \right)^8 \sqrt{\frac{d}{R}} \right)^{0,25},$$

$$\xi_{пов} = \left(2 + 0,001 \cdot \left(100 \cdot 0,028 \right)^8 \sqrt{\frac{0,25}{0,5}} \right)^{0,25} = 2,64.$$

Суммарные потери давления:

$$h_{w1-2} = \frac{1,02^2}{2 \cdot 9,81} \cdot \left(0,028 \cdot \frac{50}{0,25} + 5 + 2,64 + 5 \right) = 11,29 \text{ м.}$$

Высота расположения насоса над уровнем воды в водоеме:

$$H = \frac{101325 - 30000}{998 \cdot 9,81} - \frac{1 \cdot 1,02^2}{2 \cdot 9,81} - 0,96 = 6,27 \text{ м.}$$

Задача 5. Определить расходы воды в трубе прямоугольного поперечного сечения с отношением сторон $a : b = 0,25$ и в круглой трубе при той же площади поперечного сечения $S = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, если потери давления в этих трубах одинаковы и равны $\Delta p = 100 \text{ Па}$, а длина каждой трубы $l = 10 \text{ м}$. Температура воды $t = 15 \text{ }^\circ\text{C}$.

Решение.

Для трубы круглого сечения $d_г = d$; для трубы прямоугольного сечения при $a : b = 0,25$

$$d_э = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b} = 1,6 \cdot a.$$

Эквивалентные диаметры:

- для трубы круглого сечения

$$d_э = \sqrt{\frac{4 \cdot S}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

- для трубы прямоугольного сечения

$$d_э = 1,6 \cdot \sqrt{\frac{S}{4}} = 1,6 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{4}} \approx 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

В первом приближении примем ламинарный режим движения жидкости, тогда коэффициент гидравлического трения

$$\lambda = \frac{A}{\text{Re}},$$

где A – коэффициент формы, для труб круглого сечения $A=64$, для прямоугольного – $A=73$.

Тогда потери давления

$$\Delta p_{\text{лам}} = \frac{A}{\text{Re}} \frac{l}{d_э} \frac{\rho v^2}{2} = \frac{A v}{\nu d_э} \frac{l}{d_э} \frac{\rho v^2}{2} = \frac{A v l \rho v}{d_э^2 2},$$

где ρ – плотность воды при $t = 15^\circ \text{C}$ (см. приложение 2), $\rho = 999 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$,

ν – коэффициент кинематической вязкости воды при $t = 15^\circ \text{C}$

$\nu \approx 1,15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ (см. приложение 2).

Скорость движения воды в трубе круглого сечения

$$v = \frac{2 \cdot \Delta p_{\text{лам}} \cdot d_э^2}{64 \cdot \nu l \rho},$$

$$v = \frac{2 \cdot 100 \cdot (1,6 \cdot 10^{-2})^2}{64 \cdot 1,15 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 999} \approx 0,07 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Скорость движения воды в трубе прямоугольного сечения

$$v = \frac{2 \cdot \Delta p_{\text{лам}} \cdot d_э^2}{73 \cdot \nu l \rho},$$

$$v = \frac{2 \cdot 100 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^2}{73 \cdot 1,15 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 999} \approx 0,03 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерий Рейнольдса:

- для трубы круглого сечения

$$\text{Re} = \frac{v d_g}{\nu},$$

$$\text{Re} = \frac{0,07 \cdot 1,6 \cdot 10^{-2}}{1,15 \cdot 10^{-6}} = 974;$$

- для трубы прямоугольного сечения

$$\text{Re} = \frac{0,03 \cdot 1,1 \cdot 10^{-2}}{1,15 \cdot 10^{-6}} = 287.$$

Предположение подтвердилось – ламинарный режим движения воды.

Расход воды:

- в круглой трубе

$$Q = v \cdot S,$$

$$Q = 0,07 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1,4 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{с}};$$

- в прямоугольной трубе

$$Q = 0,03 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 0,6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

Таким образом, в условиях ламинарного режима движения при одной и той же площади живого сечения и одинаковых потерях давления круглая труба пропускает расход в 2,3 раза больший, чем труба прямоугольного сечения.

Задача 6. По вытяжной трубе диаметром $D = 700$ мм газ удаляется из борова котельной установки (рис. 80), где имеется разрежение, соответствующее высоте

$h_1 = 10$ м вод.ст. Плотность газа $\rho_g = 0,7 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; плотность воздуха $\rho_v = 1,2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

отношение сечения борова к сечению трубы $\frac{S_1}{S_2} = 2$. Коэффициент гидравлического трения $\lambda = 0,02$; коэффициент потерь на входе в трубу с поворотом $\xi = 0,7$.

Определить: а) необходимую высоту трубы для создания тяги, если массовый расход дымовых газов $G = 8000 \frac{\text{кг}}{\text{ч}}$; б) массовый расход при $H = 26$ м.

Решение.

а) Необходимая высота трубы.

Скорость газа в трубе

$$v = \frac{4 \cdot G}{\pi \cdot D^2 \cdot \rho_2},$$

$$v = \frac{4 \cdot 8000}{3,14 \cdot 0,7^2 \cdot 0,7 \cdot 3600} = 8,24 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

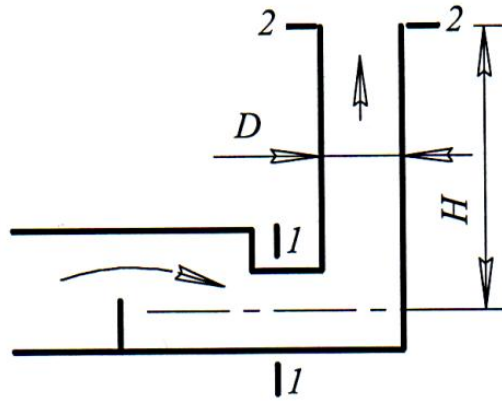


Рис. 80. К задаче 6

Выбрав сечения и плоскость сравнения по оси бора, запишем уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho_2 \cdot g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2 \cdot g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho_2 \cdot g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2 \cdot g} + h_{w1-2}.$$

Потери напора (давления) при движении газа от сечения 1-1 до сечения 2-2:

$$h_{w1-2} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v_2^2}{2g} + \xi \frac{v_2^2}{2g}.$$

Изменение атмосферного давления по высоте

$$p_{2атм} = p_{1атм} - \rho_в g H.$$

Решив совместно уравнения с учетом того, что $p_2 = p_{2атм}$;

$p_{1атм} - p_1 = \rho_{вод} g h_1$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$; $v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1}$; $l = H$, получим

$$\rho_{вод} g h_1 = g \cdot (\rho_в - \rho_2) H + \frac{\rho_2 v_2^2}{2} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1 - \lambda \frac{H}{D} - \xi \right),$$

$$1000 \cdot 9,8 \cdot 0,01 = 9,8 \cdot (1,2 - 0,7) H + \frac{0,7 \cdot 8,24^2}{2} \left(\frac{1}{2^2} - 1 - 0,02 \frac{H}{0,7} - 0,7 \right),$$

$$H = 31,1 \text{ м.}$$

б) Массовый расход.

Уравнение полученное в первой части задачи, не меняется, решаем его относительно скорости

$$\rho_{\text{вод}} g h_1 = g \cdot \rho_2 \cdot H + \frac{\rho_2 v_2^2}{2} \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1 - \lambda \frac{H}{D} - \xi \right),$$

$$1000 \cdot 9,8 \cdot 0,01 = 9,8 \cdot 0,7 \cdot 26 + \frac{0,7 \cdot v_2^2}{2} \left(\frac{1}{2^2} - 1 - 0,02 \frac{26}{0,7} - 0,7 \right),$$

$$v_2 = 6,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Объемный расход газа

$$Q = v_2 \cdot S,$$

$$Q = 6,14 \cdot \frac{\pi}{4} 0,7^2 = 2,36 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

Массовый расход газа

$$G = Q \cdot \rho_2,$$

$$G = 2,36 \cdot 0,7 \cdot 3600 = 5951,6 \frac{\text{кг}}{\text{ч}}.$$

Задача 7. Определить расход керосина $T-1$ при температуре 20°C , протекающего по трубопроводу из сваренных труб из нержавеющей стали в пункты 1 и 2 (рис. 81), если напор H в резервуаре постоянный и равный 7,2 м. Длина отдельных частей трубопровода $l = l_1 = l_2 = 9,2$ м, диаметры: $d = 0,05$ м, $d_1 = d_2 = 0,04$ м. Местные потери напора в расчетах не учитывать.

Решение:

Так как трубы 1 и 2 параллельны, то потерянные напоры в этих трубах

$$h_{mp1} = h_{mp2}$$

или

$$\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g}.$$

По условию задачи размеры параллельных труб, изготовленных из одного материала, одинаковы ($l_1 = l_2$, $d_1 = d_2$) поэтому

$$\lambda_1 = \lambda_2 \text{ и } v_1 = v_2.$$

Следовательно,

$$Q_1 = Q_2;$$

$$Q = 2Q_1 = 2Q_2,$$

где Q – расход в трубопроводе;

Q_1, Q_2 – расход в параллельных ветвях трубопровода.

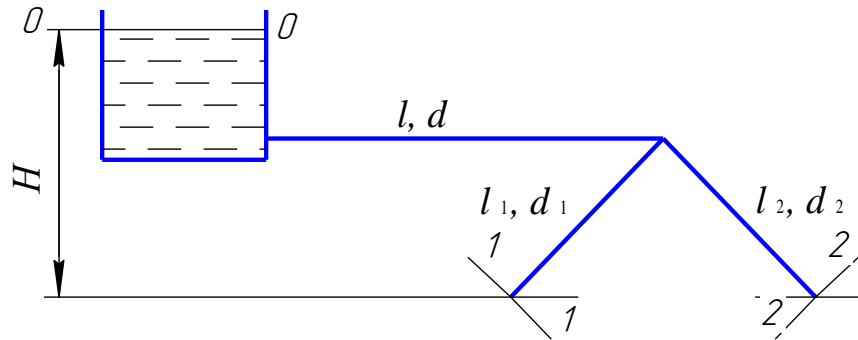


Рис. 81. К задаче 7

Уравнение Бернулли для сечений 0 – 0 и 1 – 1:

$$Z_0 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_0^2}{2g} = Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_{w0-1}.$$

Так как $z_0 = H$, $v_0 = 0$, $p_0 = p_1 = p_a$, $h_{mp} = h_{mp1} = h_{mp2}$,

$$H = \frac{v_1^2}{2g} + h_{mp} + h_{mp1}$$

$$H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \left(1 + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1}\right) \frac{v_1^2}{2g}.$$

Уравнение (142) можно решить только графоаналитическим способом. Задаемся разными значениями расхода жидкости в трубопроводе и для этих значений Q вычисляем v и v_1 :

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}; \quad v_1 = \frac{4Q}{2\pi d_1^2}.$$

По известным величинам v и d , v_1 и d_1 определяем числа Рейнольдса Re и Re_1 :

$$Re = \frac{vd}{\nu}, \quad Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu}.$$

Для керосина $T - 1 \quad t = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$, $\nu = 2,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$. У сварных труб из нержавеющей стали эквивалентная шероховатость $\Delta_s = 75 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, поэтому относительная эквивалентная шероховатость труб

$$\overline{\Delta_s} = \frac{\Delta_s}{d} = \frac{75 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^{-3};$$

$$\overline{\Delta}_{\partial 1} = \frac{\Delta_{\partial 1}}{d_1} = \frac{75 \cdot 10^{-6}}{40 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

По известным величинам Re и $\overline{\Delta}_{\partial}$, Re_1 и $\overline{\Delta}_{\partial 1}$ по графику Колбрука определяем коэффициенты сопротивления трения λ и λ_1 и далее уравнению устанавливаем необходимый напор. Расчет сводим в табл. 10.

Таблица 10

Расчет гидравлической характеристики трубопроводов			
$Q \cdot 10^3, \frac{M^3}{c}$	2	5	8
$v, \frac{M}{c}$	1,02	2,55	4,09
$Re \cdot 10^{-4}$	2,04	5,10	8,18
λ	0,032	0,026	0,0245
$\frac{v^2}{2g}, M$	0,053	0,332	0,851
h_{mp}, M	0,312	1,54	3,83
$v_1, \frac{M}{c}$	0,795	1,99	3,19
$Re_1 \cdot 10^{-4}$	1,27	3,18,	5,10
λ_1	0,032	0,0285	0,028
$\frac{v_1^2}{2g}, M$	0,0322	0,202	0,519
h_{mp1}, M	0,23	1,33	3,34
H, M	0,574	3,07	7,69

Задача 8. Определить расход воды при истечении через квадратное отверстие в боковой стенке резервуара в атмосферу. Длина стороны отверстия $a = 180$ мм (рис. 82). Глубина погружения центра отверстия $H = 500$ мм и избыточное давление на поверхности воды в резервуаре $p_m = 1,45$ атм поддерживаются неизменными. Скоростью подхода пренебречь.

Решение.

Определим при данном расположении отверстия в стенке резервуара тип сжатия:

$$l_1 = c = 0,1 \text{ м} < 3a = 0,54 \text{ м};$$

$$l_2 = \frac{b-a}{2} = 0,06 \text{ м} < 3a = 0,54 \text{ м}.$$

Следовательно, сжатие при истечении воды при данном расположении отверстия будет несовершенным, коэффициент расхода определим по выражению:

$$\mu_{\text{нес}} = \mu \cdot \left[1 + 0,641 \cdot \left(\frac{\omega}{S} \right)^2 \right],$$

где μ – коэффициент расхода при полном совершенном сжатии струи, при $a = 0,18$ м и напоре над центром тяжести отверстия H_0 ,

$$H_0 = H + \frac{P_m}{\rho \cdot g},$$

$$H_0 = 0,5 + \frac{1,45 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9,8} = 15 \text{ м},$$

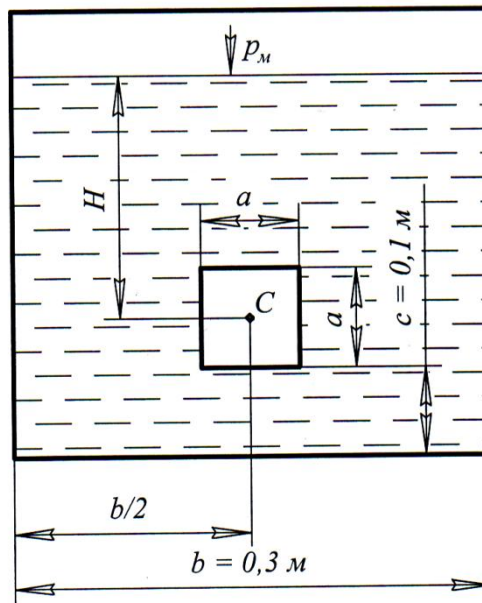


Рис. 82. К задаче 8

согласно приложению 16, $\mu = 0,599$;

ω – площадь отверстия,

$$\omega = a^2 = 0,18^2 = 0,0324 \text{ м}^2;$$

S – площадь стенки резервуара,

$$S = b \cdot \left(H + \frac{a}{2} + c \right),$$

$$S = 0,3 \cdot \left(0,5 + \frac{0,18}{2} + 0,1 \right) = 0,207 \text{ м}^2.$$

Коэффициент расхода

$$\mu_{\text{нес}} = 0,599 \cdot \left[1 + 0,641 \cdot \left(\frac{0,0324}{0,207} \right)^2 \right] = 0,691.$$

Расход воды, вытекающей через отверстие:

$$Q = \mu_{\text{нес}} \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH_0},$$

$$Q = 0,691 \cdot 0,0324 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 15} = 0,384 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

Задача 9. Открытый понтон (рис. 83), имеющий форму прямоугольного параллелепипеда шириной $b = 2$ м, длиной $l = 5$ м, высотой $H = 0,5$ м и весом $G = 10$ кН, получил в дне пробоину диаметром $d = 15$ мм. Считая пробоину затопленным отверстием в тонкой стенке, определить время, в течение которого понтон затонет.

Решение.

Осадка понтона до получения пробоины

$$h = \frac{G}{b \cdot l \cdot \rho \cdot g}.$$

Расход воды за секунду через пробоину при напоре h :

$$Q = \mu \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

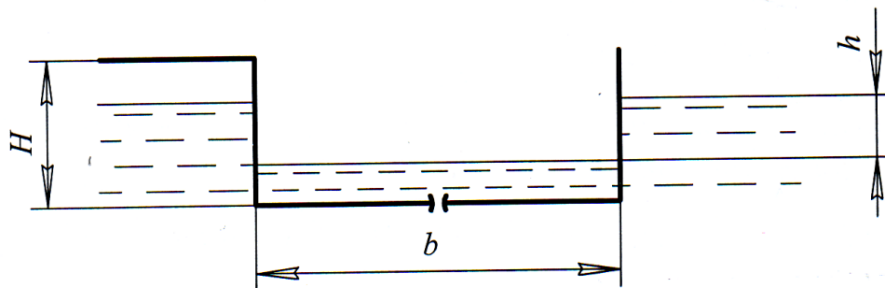


Рис. 83. К задаче 9

Увеличение глубины воды в понтоне в результате притока за секунду:

$$h' = \frac{\mu \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{b \cdot l}.$$

Осадка понтона от притока поступающей в него воды за секунду:

$$h'' = \frac{\rho \cdot g \cdot Q}{\rho \cdot g \cdot b \cdot l} = \frac{\mu \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{b \cdot l}.$$

Получим $h' = h''$. Значит, напор над пробоиной h остается постоянным в течении всего времени погружения понтона.

Понтон затонет, когда его вес станет равным

$$G_1 = \rho \cdot g \cdot b \cdot l \cdot (H - h)$$

или когда в него поступит объем воды

$$V = b \cdot l \cdot (H - h)$$

Время от момента получения пробоины до затопления понтона

$$t = \frac{V}{Q} = \frac{b \cdot l \cdot (H - h)}{\mu \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} = \frac{b \cdot l \cdot \left(H - \frac{G}{\rho \cdot g \cdot b \cdot l} \right)}{\mu \cdot S \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{G}{\rho \cdot g \cdot b \cdot l}}} = \frac{b \cdot l \cdot H - \frac{G}{\rho \cdot g}}{\mu \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{G}{\rho \cdot g \cdot b \cdot l}}}$$

$$t = \frac{2 \cdot 5 \cdot 0,5 - \frac{10000}{1000 \cdot 9,8}}{0,6 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0,015^2 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot \frac{10000}{1000 \cdot 9,8 \cdot 2 \cdot 5}}} = 26636 \text{ с} = 7 \text{ ч } 23 \text{ мин } 56 \text{ с.}$$

Задача 10. Определить диаметр железобетонного дюкера длиной $l = 50$ м, проложенного под автомобильной дорогой (рис. 84), и разность между подпорным и бытовым горизонтами. Расход воды $Q = 2,3 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$ в дюкере и допускаемая скорость $v = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Решение:

Диаметр дюкера из формулы:

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,3}{3,14 \cdot 3}} = 0,98 \text{ м.}$$

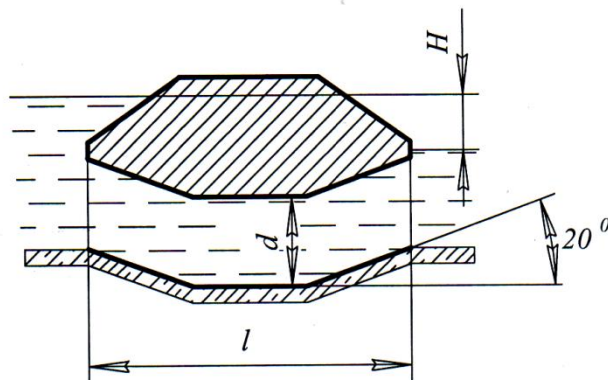


Рис. 84. К задаче 10

Примем стандартный диаметр $d = 1,0$ м, тогда действительная скорость в дюкере:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2},$$

$$v = \frac{4 \cdot 2,3}{3,14 \cdot 1,0^2} = 2,93 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Коэффициент расхода системы

$$\mu_{\text{сист}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \xi_{\text{сист}}}}.$$

Для данного случая сумма коэффициентов местных сопротивлений

$$\xi_{\text{сист}} = \xi_{\text{вх}} + 2\xi_{\text{пов}} + \xi_{\text{вых}} + \lambda \frac{l}{d},$$

где $\xi_{\text{вх}}$ – коэффициент местного сопротивления на вход, $\xi_{\text{вх}} = 0,5$;

$\xi_{\text{пов}}$ – коэффициент местного сопротивления на плавный поворот, при повороте на $\alpha = 20^\circ$ и $\xi_{90^\circ} \approx 1$

$$\xi_{\text{пов}} = \xi_{90^\circ} \left(-\cos\alpha \right) \approx 1 \cdot \left(-\cos 20^\circ \right) \approx 0,06;$$

$\xi_{\text{вых}}$ – коэффициент местного сопротивления на выход, $\xi_{\text{вых}} = 1$.

$$\xi_{\text{сист}} = 0,5 + 2 \cdot 0,06 + 1 + \lambda \frac{l}{d} = 1,62 + \lambda \frac{l}{d}.$$

Коэффициент трения определим по формуле

$$\lambda = \frac{8g}{C^2}.$$

Коэффициент Шези по формуле Маннинга, используемой при расчете отверстий малых искусственных сооружений

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} = \frac{1}{n} \left(\frac{d}{4} \right)^{1/6},$$

где n – коэффициент шероховатости, зависящий от состояния стенок и дна русла, для бетона $n = 0,013$,

$$C = \frac{1}{0,013} \frac{1,0^{1/6}}{4} = 61 \frac{\text{м}^{0,5}}{\text{с}},$$

$$\lambda = \frac{8 \cdot 9,8}{61^2} = 0,021,$$

$$\xi_{\text{сист}} = 1,62 + 0,021 \frac{50}{1,0} = 2,67.$$

Коэффициент расхода системы

$$\mu_{сист} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2,67}} = 0,52.$$

Разность между подпорным и бытовым уровнями воды. Пренебрегая скоростью подхода, как малой величиной, тогда

$$H = \frac{Q^2}{\mu_{сист}^2 S^2 2g},$$

$$H = \frac{2,3^2}{0,52^2 \left(\frac{3,14 \cdot 1^2}{4} \right)^2 2 \cdot 9,8} = 1,91 \text{ м.}$$

Контрольные вопросы к темам главы 2

1. Гидродинамика. Задачи гидродинамики.
2. Виды движения жидкостей.
3. Основные понятия гидродинамики. Линии тока. Трубка тока. Элементарная струйка. Свойства элементарной струйки.
4. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера).
5. Дифференциальные уравнения неразрывности движущейся жидкости.
6. Уравнение неразрывности.
7. Уравнение установившегося движения элементарной струйки идеальной жидкости.
8. Механическая энергия потока жидкости.
9. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.
10. Геометрическая интерпретация уравнения Бернулли для потока реальной жидкости.
11. Применение трубы Вентури для измерения расхода жидкости в напорных трубопроводах.
12. Гидродинамическая трубка Пито. Гидродинамическая трубка Пито – Прандтля.
13. Режимы движения жидкости. Критерий Рейнольдса.
14. Шероховатость внутренней поверхности трубопроводов. Гидравлически гладкие и шероховатые трубы.
15. Ламинарный режим движения жидкости. Турбулентный режим движения жидкости.
16. Распределение скоростей при турбулентном режиме движения. Учет толщины ламинарного подслоя при турбулентном течении в шероховатых трубах.
17. Классификация потерь напора. Коэффициент гидравлического трения. Местные сопротивления.
18. Классификация трубопроводов.
19. Методика расчета простого трубопровода.
20. Методика расчета гидравлически коротких трубопроводов. Расчет сифонного трубопровода.
21. Гидравлический удар в трубопроводах. Основные положения.
22. Скорость распространения ударной волны.
23. Истечение жидкости через отверстие в тонкой стенке.
24. Несовершенное сжатие струи. Инверсия струи. Истечение под уровень.
25. Истечение жидкости через большие отверстия.
26. Истечение жидкости при переменном напоре.
27. Истечение жидкости из насадков.
28. Гидравлические струи. Движение жидкости в открытых руслах.
29. Водосливы. Коэффициент расхода, расход жидкости.
30. Отверстия малых мостов. Критическая глубина, ширина отверстия моста.
31. Гидравлический расчет открытых русел.
32. Виды подобия. Второй закон Ньютона. Законы Фруда, Рейнольдса.